REPRESENTASI ATOMIK DARI SEMIGRUP BEBAS F_n

Destiana Lovitarani [1], Rizky Rosjanuardi [2], Isnie Yusnitha [3]

[1), 2), 3)] Departemen Pendidikan Matematika FPMIPA UPI

*Surel: destiana.lovitarani@student.upi.edu

ABSTRAK. Misalkan F_n sebuah semigrup bebas yang memuat semua word yang dibangun oleh non-commuting n -letters. Aljabar yang dibangun oleh F_n disebut aljabar semigrup bebas di mana setiap generatornya dipetakan ke suatu isometri, sehingga aljabar semigrup bebas merupakan aljabar yang dibangun oleh n -tuple isometri $(S_1,\ldots,S_n)$ dengan range yang pairwise orthogonal. Sebuah n -tuple isometri $(S_1,\ldots,S_n)$ dikatakan atomik bebas jika terdapat basis ortonormal $\{\xi_k\}$ dari ruang Hilbert H , sedemikian sehingga terdapat endomorfisma $\pi_i: N \longrightarrow N$ (di mana $1 \le i \le n$) dan skalar $\lambda_{i,k} \in T$ yang memenuhi $S_i \xi_k = \lambda_{i,k} \xi_{\pi_{i(k)}}$. Representasi dari F_n yang berkorespondensi dengan isometri yang atomik bebas tersebut disebut dengan representasi atomik. Selanjutnya representasi atomik ini diklasifikasikan berdasarkan relasi unitary equivalence dan ditunjukkan bahwa representasi atomik secara umum dapat didekomposisi menjadi direct sum dari subrepresentasi atomik yang iredusibel.

Kata kunci: semigrup bebas, representasi atomik, isometri, unitary equivalence.

ABSTRACT. A free semigroup F_n contains all words which are generated by non-commuting n -letters. The algebra which is generated by F_n is called a free semigroup algebra. Every generator of F_n is mapped onto isometry, so this algebra is generated by an n -tuple of isometries $(S_1,\ldots,S_n)$ with pairwise orthogonal range. One of the class representation of free semigroup algebra is atomic representation of free semigrup F_n . An n -tuple of isometries $(S_1,\ldots,S_n)$ is free atomic if there is an orthonormal basis $\{\xi_k\}$ for H for which there are endomorphisms $\pi_i: N \longrightarrow N$ (where $1 \le i \le n$) and scalars $\lambda_{i,k} \in T$ satisfying $S_i \xi_k = \lambda_{i,k} \xi_{\pi_{i(k)}}$. The corresponding representation of F_n , then is called as atomic representation. Later, atomic representation is classified up to unitary equivalence and is shown to be direct sum of irreducible atomic subrepresentations.

Keywords: free semigroup, atomic representation, isometry, unitary equivalence.

1. PENDAHULUAN

Doran [1] menyebutkan bahwa konsep aljabar- $C^{¿}$ pertama kali diperkenalkan oleh Gelfand dan Naimark pada tahun 1943 dalam sebuah literatur matematika. Semenjak saat itu, semakin banyak ilmuwan matematika yang mengembangkan konsep aljabar- $C^{¿}$. Salah satunya pada tahun 1977, J. Cuntz memperkenalkan kelas dari aljabar- $C^{¿}$ yang dibangun oleh isometri, yaitu aljabar Cuntz O_n [3]. Selanjutnya pada tahun 1999, Davidson dan Pitts memperkenalkan konsep aljabar semigrup bebas [5]. Aljabar semigrup bebas ini merupakan perkembangan dari aljabar Cuntz karena memiliki himpunan pembangun yang sama, yaitu isometri.

Semigrup bebas F_n adalah semigrup bebas yang memuat semua *word* w di mana setiap w dibangun oleh sejumlah n elemen. Davidson dan Pitts juga memperkenalkan salah satu representasi dari semigrup bebas yang disebut dengan representasi atomik [5]. Representasi ini merupakan representasi dari semigrup bebas F_n di mana range-nya memuat isometri-isometri yang bebas atomik. Representasi atomik semigrup bebas F_n ini diklasifikasikan, berdasarkan relasi *unitary equivalence,* menjadi 3 subrepresentasi atomik: representasi *left-regular* λ ; representasi *tail* π_x ; representasi *ring* $\sigma_{u,\lambda}$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa representasi atomik secara umum dapat didekomposisi sebagai *direct sum* dari ketiga subrepresentasi atomik tersebut yang iredusibel [5].

2. SEMIGRUP BEBAS F_n

Semigrup merupakan suatu himpunan bersama dengan operasi biner asosisatif yang terdefinisi di dalamnya. Jika terdapat sebuah semigrup S yang dibangun oleh sebarang himpunan A , kemudian didefinisikan suatu operasi *concatenation* ¿ untuk semigrup S sebagai berikut,

$$(a_1 a_2 \ldots a_n) * (b_1 b_2 \ldots b_m) \quad ¿ \quad a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_m \ ,$$

dengan $a_i, b_i \in A$ dan $n, m \in N$, maka semigrup $S,*¿$ ¿ disebut dengan semigrup bebas. Suatu objek dalam kategori konkrit dikatakan bebas jika dan hanya jika memenuhi sifat universal dari objek bebas [6]. Semigrup bebas adalah objek bebas dalam kategori semigrup, sehingga memenuhi sifat universal dari objek bebas dalam kategori konkrit.

Misalkan F_n menotasikan semigrup bebas, dengan elemen kesatuan, yang dibangun oleh $z_1, \ldots, z_n$. Semigrup ini memuat semua *non-commuting word* w dari generator-generatornya [4,5].

3. ALJABAR SEMIGRUP BEBAS

Aljabar Cuntz merupakan aljabar- $C^{¿}$ yang dibangun oleh isometri dengan range yang *pairwise orthogonal* [3]. Representasi dari semigrup pada aljabar- $C^{¿}$ merupakan pemetaan ke himpunan isometri pada ruang Hilbert.

Aljabar semigrup bebas merupakan aljabar *weak operator topology* (WOT)-*closed* yang dibangun oleh *n-tuple* isometri $\left(S_1, \ldots, S_n\right)$ dengan range yang *pairwise orthogonal* [5]. Aljabar semigrup bebas dinotasikan sebagai $S = Alg\left\{S_1^{\prime}, \ldots, S_n\right\}^{WOT}$. Representasi dari semigrup bebas F_n pada aljabar semigrup bebas merupakan pemetaan setiap generator dari *word* $w \in F_n$ ke isometri pada ruang Hilbert sehingga aljabar semigrup bebas dapat juga dikatakan dibangun oleh isometri.

4. REPRESENTASI ATOMIK DARI SEMIGRUP BEBAS F_n

Sebuah *n-tuple* dari isometri $S = \left(S_1, \ldots, S_n\right)$ adalah atomik bebas jika $\sum_{i=1}^{n} S_i S_i^{¿} \leq I$ dan terdapat sebuah basis ortonormal $\left\{\xi_k\right\}$ dari ruang Hilbert H , sedemikian sehingga terdapat endomorfisma $\pi_i : N \rightarrow N$ (di mana $1 \leq i \leq n$) dan skalar $\lambda_{i,k} \in T$ yang memenuhi $S_i \xi_k = \lambda_{i,k} \xi_{\pi_{i(k)}}$ [5]. Representasi dari semigrup bebas F_n yang berkorespondensi dengan isometri tersebut dikatakan atomik. Aljabar semigrup bebas atomik adalah aljabar WOT-*closed* $A = Alg\left(S_1, \ldots, S_n\right)$ yang dibangun oleh himpunan isometri atomik bebas.

Misalkan π_1 dan π_2 adalah representasi dari aljabar- $C^{¿}$ A pada ruang Hilbert H_1 dan H_2 . π_1 dan π_2 dikatakan *unitarily equivalent* jika terdapat operator uniter $u \in B\left(H_1, H_2\right)$ sedemikian sehingga $\pi_2(x) = u \pi_1(x) u^{¿}$ untuk setiap $x \in A$ [2]. Davidson dan Pitts mengklasifikasikan representasi atomik menjadi 3 kelas subrepresentasi berdasarkan relasi *unitary equivalence* tersebut.

(i) Representasi *left-regular* λ .

Misalkan λ merupakan representasi dari semigrup bebas F_n . Representasi *left-regular* λ dari F_n merupakan isometri $L_i = \lambda(z_i)$ untuk $1 \le i \le n$ yang didefinisikan oleh $L_i : \xi_w \longmapsto \xi_{z_i w}$, yang selanjutnya dapat ditulis $L_v : \xi_w \longmapsto \xi_{vw}$ untuk setiap $v, w \in F_n$. Aljabar semigrup bebas yang dibangun oleh $L = (L_1, \ldots, L_n)$ disebut dengan *non-commutative analytic Toeplitz algebra* dan dinotasikan oleh L_n .

Representasi *right regular* didefinisikan oleh $R_v : \xi_w \longmapsto \xi_{wv}$ untuk setiap $v, w \in F_n$, dengan $R_{\widetilde{w}} = \lambda(w)$ dan $R_{\widetilde{w}}$ menotasikan *word* w yang urutannya dibalik. Misalkan $R_i = R_{z_i} = \lambda(z_i)$ menotasikan peta dari generator-generator untuk $1 \le i \le n$; dan R_n menotasikan aljabar WOT-*closed* yang dibangun oleh R_i . Notasikan W sebagai operator uniter yang memetakan ξ_w ke $\xi_{\widetilde{w}}$. Dapat dilihat bahwa $W L_i W^{¿} = R_i$. Sehingga R_n *unitarily equivalent* dengan L_n

(ii) Representasi *tail* π_x ,

Misalkan H_x adalah ruang Hilbert dengan basis ortonormal $\{\xi_v : v \in F_n x^{-1}\}$. Definisikan representasi π_x dari representasi semigrup bebas F_n pada H_x oleh $\pi_x(z_i)\xi_v = \xi_{z_i v}$ untuk $v \in F_n x^{-1}$. *Word* x dan x' , dengan $x' = z_{j_1} z_{j_2} \ldots z_{j_m} \ldots$, dikatakan *tail equivalent* jika terdapat bilangan bulat k dan l sedemikian sehingga $i_{m+k} = j_{m+l}$ dengan $m \ge 0$.

Notasikan $[x]$ sebagai kelas *tail equivalent* dari x . Ketika x dan x' *tail equivalent*, maka terdapat operator uniter, $U : H_x \longrightarrow H_x$; $\xi_{v x_{m+k}^{-1}} \longmapsto \xi_{v x_{m+l}^{-1}}$ untuk $v \in F_n$ dan $m \ge 0$. U merupakan pemetaan bijektif di antara basis-basis yang menghubungkan representasi π_x dan representasi $\pi_{x'}$, sehingga U memperluas ke operator uniter yang mengimplementasikan *unitary equivalence* dari representasi π_x dan representasi $\pi_{x'}$. Representasi π_x dan representasi $\pi_{x'}$ dikatakan *unitarily equivalent* jika dan hanya jika x dan x' *tail equivalent*.

(iii) Representasi *ring* $\sigma_{u,\lambda}$

Misalkan $u = z_{i_1} \ldots z_{i_k}$ merupakan *word* non-trivial pada F_n dan λ merupakan skalar modulus 1. Pada kelas representasi ini, akan dikonstruksi representasi dari F_n di mana *word* u dipetakan ke isometri yang memiliki λ sebagai nilai eigen. Definisikan representasi $\sigma_{u,\lambda}$ dari F_n sebagai

$\sigma_{u,\lambda}(z_i)\xi_{s,1}=\xi_{s-1,1}$ jika $i=i_s$, $s>1$,

$\sigma_{u,\lambda}(z_i)\xi_{1,1}=\lambda\xi_{k,1}$ jika $i=i_1$,

$\sigma_{u,\lambda}(z_i)\xi_{s,1}=\xi_{s,z_i}$ jika $i\neq i_s$,

$\sigma_{u,\lambda}(z_i)\xi_{s,w}=\xi_{s,z_i w}$ jika $w\neq i$.

Perhatikan bahwa $\sigma_{u,\lambda}(u)\xi_{k,1}=\lambda\xi_{k,1}$. *Word* u disebut dengan generator pusat untuk representasi ini, dan barisan $\xi_{s,1}$ untuk $1\leq s\leq k$ dari vektor-vektor basis yang dipermutasi secara siklik disebut dengan siklus pusat. Masing-masing vektor basis $\xi_{s,1}$ dipetakan oleh $\sigma_{u,\lambda}(z_{i_s})$ ke vektor berikutnya pada siklus yaitu $\xi_{s-1,1}$, namun ketika $j\neq i_s$ maka $\sigma_{u,\lambda}(z_j)\xi_{s,1}=\xi_{s,z_j}$. Sehingga vektor basis ini disebut vektor *wandering* dan representasinya merupakan multiplisitas dari representasi *left regular*. Jadi representasi ini memuat cincin pusat dengan k titik, di mana masing-masing titiknya terdapat sebanyak $n-1$ jari-jari yang ekuivalen dengan representasi *left regular*.

Jika u dirotasi secara siklik, maka didapat representasi yang ekuivalen. Notasikan $\langle u\rangle$ sebagai kelas ekuivalen dari u bergantung pada permutasi siklik.

Proposisi 4.1[5] Perhatikan ketiga klasifikasi dari representasi atomik berikut:

i. Representasi *left-regular* λ iredusibel.

ii. Representasi π_x iredusibel, kecuali ketika *word* tak hingga x *tail equivalent* dengan *word* yang periodik. Jika x *tail equivalent* dengan primitif *word* u yang periodik, maka $\pi_x \simeq \int_T^{\square} \bigoplus \sigma_{u,\lambda}\, d\lambda$.

iii. Representasi $\sigma_{u,\lambda}$ iredusibel ketika u primitif. Ketika $u=v^r$ dan v primitif, maka $\sigma_u\simeq\sum_{j=1}^{r}\bigoplus\sigma_{v,\mu_j}$ di mana μ_j adalah akar ke-r dari λ .

Teorema 4.2[5] Setiap representasi dari semigrup bebas sebagai aljabar semigrup bebas atomik *unitarily equivalent* dengan salah satu dari representasi berikut:

i. Representasi *left-regular* λ ,

ii. Representasi π_x , yang berkoresponden dengan *word* tak hingga yang aperiodik x yang unik, bergantung pada *tail equivalence*, atau

iii. Representasi $\sigma_{u,\lambda}$, di mana u primitif dan unik bergantung pada permutasi siklik dan konstanta λ di T .

Dekomposisi ini adalah kanonik.

Akibat 4.3[5] Setiap representasi atomik ρ dari semigrup bebas F_n dapat didekomposisi secara unik sebagai

$$\rho \simeq \lambda^{(\alpha)} \oplus \sum \oplus \pi_{[x]}^{(\beta_{[x]})} \oplus \sum \oplus \sigma_{\langle u \rangle, \lambda}^{(\zeta_{\langle u \rangle, \lambda})}$$

dimana :

- α merupakan $rank\left(I - \sum_{n=1}^{n} \rho(z_i)\rho(z_i)^{¿} \right)$;
- Jika x adalah (atau ekuivalen dengan) *word* tak hingga yang aperiodik dengan kelas ekuivalen $[x]$, maka $(\beta_{[x]}) = rank(P_x)$ di mana $P_x = SOT - \lim_{m \to \infty} \rho(x_m)\rho(x_m)^{¿}$;
- jika x adalah (atau ekuivalen dengan) *word* yang periodik u^{∞} , $\beta_{[x]}$ merupakan kelipatan dari *bilateral shift* $P_x \rho(u)$;
- untuk setiap *word* u dengan kelas permutasi siklik $\langle u \rangle$, maka $(\zeta_{\langle u \rangle, \lambda}) = rank(P_{u,\lambda})$ di mana

$$P_{u,\lambda} = SOT - \lim_{m \to \infty} p_m(\acute{\lambda} \rho(u)) \quad \text{dan} \quad p_m(x) = \frac{1}{m!} \sum_{j=1}^{m!} x^{m!+j} \ .$$

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Doran, R. S. (Penyunt.). (1994). *C*-Algebras: 1943-1993 A Fifty Year Celebration. Series: Contemporary Mathematics*. 167. Rhode Island: American Mathematical Society.

[2] Blackadar, B. (2006). *Operator Algebras : Theory of C*-Algebras and von-Neumann Algebras*. Berlin: Springer-Verlag.

[3] Cuntz, J. (1977). *Simple C*-Algebras Generated by Isometries*. Communications in Mathematical Physics, 173-185.

[4] Davidson, K. R. (2001). *Free Semigroup Algebras A Survey*. International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA). 129, hal. 209-240. Bordeaux: Springer Basel AG.

[5] Davidson, K. R., & Pitts, D. R. (1999). *Invariant Subspace and Hyper-Reflexivity for Free Semigroup Algebras*. Proceedings of the London Mathematical Society, 78(02), 401-430.

[6] Hungerford, T. W. (1974). *Graduate Texts in Mathematics : Algebra*. New York: Springer Verlag.