PENERAPAN MODEL M_0 DAN MODEL M_t UNTUK MENGESTIMASI UKURAN POPULASI TERTUTUP PADA DATA CAPTURE-RECAPTURE

Asep Ridwan Lubis [1)], Dadan Dasari [2)], Fitriani Agustina [3)]

[1), 2), 3)] Departemen Pendidikan Matematika FPMIPA UPI

*Surel:

ABSTRAK. Statistika merupakan keilmuan yang bertujuan mengumpulkan, mengolah, menyajikan, dan menarik kesimpulan berdasarkan analisis data. Salah satu kajian yang terus dikembangkan dalam statistika yaitu analisis data *Capture-Recapture*. Analisis data *Capture-Recapture* memiliki ciri yaitu mengumpulkan data dengan teknik *Capture, Mark, Release, Recapture (CMRR).* Permasalahan yang akan dibahas karya tulis ini yaitu mengestimasi ukuran populasi pada data tersebut. Estimasi populasi merupakan proses pendekatan matematis untuk menaksir ukuran populasi. Populasi merupakan objek yang memiliki karakteristik tertentu yang akan dipelajari dan ditarik kesimpulannya. Banyak anggota suatu populasi disebut ukuran populasi. Berdasarkan karakteristik ukuran, populasi dikelompokkan menjadi dua yaitu populasi tertutup dan populasi tidak tertutup. Populasi tertutup berarti banyak anggota dalam populasi dari waktu ke waktu konstan, sedangkan populasi tidak tertutup berarti banyak anggota dalam populasi dari waktu ke waktu tidak konstan. Estimasi ukuran populasi tertutup dipengaruhi oleh nilai peluang penangkapan pada setiap kesempatan penangkapan. Apabila nilai peluang penangkapan selama penelitian tidak berbeda secara signifikan maka estimasi populasi akan dimodelkan dengan Model M_0. Sedangkan, apabila nilai peluang penangkapan selama penelitian berbeda secara siginifikan maka estimasi populasi akan dimodelkan dengan Model M_t. Dalam penulisan karya tulis ilmiah ini, penulis mencoba mengestimasi populasi pada Model M_0 dan Model M_t serta mengaplikasikan kedua model tersebut dalam menghitung populasi paus bungkuk *(Megaptera novaeangliae)* dan populasi tupai *(Eutamias Minimus)*. Berdasarkan hasil penghitungan diperoleh bahwa estimasi ukuran populasi paus bungkuk adalah sebanyak 121 paus. Sedangkan estimasi ukuran populasi tupai adalah sebanyak 50 tupai.

Kata kunci: Analisis data *Capture-Recapture*, Estimasi Ukuran Populasi Tertutup, Model M_0, Model M_t.

ABSTRACT. Statistics is a science that aims to collecting, processing, presenting, and draw the conclusions based on the analysis of data. One of study is developing in statistical is Analysis of Capture-Recapture Data. Analysis of Capture-Recapture Data has a characteristic which collects data by using technics : Capture, Mark, Release, Recapture (CMRR). The Problems will discussed this paper is how about estimate the closed population size. Estimating the population is a mathematical approach to estimate the population size. Population is an object which has certain characteristics that will be studied and drawn conclusions. The number of all members on population is called the size of population. Based on the characteristics of size, population has grouping into two : closed population and open population. Closed population means the size of population is constant during over time, while open population means the size of population is not constant during over time. Estimating the size of closed population are affected by probability of captured on each occasion the arrest. If the probability of captured during the study is not significantly differ then the estimating process modeled by Model M_0. Otherwise, if the probability of captured is significantly different the estimating process modeled by Model M_t. In this paper, will be shown the estimating process on closed population modeled by Model M_0 and Model M_t. The application of each models is applied to calculate the population of humpback whales (Megaptera novaeangliae) and the population of squirrels (Eutamias minimus). Based on the calculation results, obtained that the humpback whale population size estimates are 121 whales and the squirrel population size estimates are 50 squirrels.

Keywords: Analysis of Capture-Recapture Data, Estimation of Closed Population Size, Model M_0, Model M_t.

1. PENDAHULUAN

Statistika menjadi bagian yang tidak terpisahkan untuk menunjang berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi. Para peneliti dan akademisi menggunakan statistika sebagai alat untuk menyederhanakan kompleksitas masalah yang diilhami dari pengamatan gejala-gejala alam, sosial, budaya dalam kehidupan sehari-hari. Statistika juga menjadi alat komunikasi yang berfungsi untuk menyampaikan hasil penelitian kepada masyarakat sehingga bisa mengerti dan dipahami secara komprehensif. Salah satu permasalahan yang dapat ditentukan penyelesaian oleh peneliti di bidang statistika yaitu penaksiran populasi.

Menurut Sugiyono (2008), populasi merupakan wilayah generalisasi yang terdiri atas obyek/subyek yang mempunyai kuantitas dan karakteristik tertentu yang ditetapkan oleh peneliti untuk dipelajari dan kemudian ditarik kesimpulannya. Berdasarkan karakteristik ukuran, populasi dikelompokkan menjadi dua yaitu populasi tertutup dan populasi tidak tertutup. Menurut Otis dkk. (1978), populasi tertutup dapat diartikan tidak ada faktor yang memengaruhi perubahan ukuran populasi. "*Closure usually means the size of the population is constant over the period of investigation, i.e., no recruitment (birth or immigration) or loses (death or emigration)...*". Populasi tertutup merupakan suatu populasi dimana ukuran populasi konstan selama periode penelitian, tidak ada penambahan (kelahiran atau imigrasi) atau pengurangan (kematian atau emigrasi). Secara umum, makna tertutup pada populasi tertutup ini dapat diartikan bahwa tidak ada perubahan dalam anggota populasi secara signifikan.

Sedangkan, yang dimaksud dengan populasi tidak tertutup yaitu suatu populasi dimana ukuran populasi berubah-ubah selama periode penelitian. Secara umum, makna tidak tertutup pada populasi tidak tertutup ini dapat diartikan bahwa jumlah anggota populasi secara signifikan mengalami penurunan atau peningkatan.

Estimasi populasi merupakan suatu metode yang dilakukan untuk memperkirakan ukuran populasi. Salah satu metode yang sering digunakan untuk mengestimasi ukuran populasi adalah Metode *Capture-Recapture* atau dikenal sebagai pula sebagai metode *Capture, Mark, Release, Recapture* (CMRR). Kajian mengenai estimasi ukuran populasi ini secara serius dimulai pada awal tahun 1950 yang diterapkan pada keilmuan hayati. Kajian ilmiah mengenai estimasi ukuran populasi yang dilakukan pada rentang waktu tersebut baru dipublikasikan secara masif pada tahun 1973 oleh dua orang peneliti *Cormack* dan *Seber*. Selanjutnya, berbagai literatur diterbitkan selama lebih dari 25 tahun yang lalu. (Otis dkk.,1978).

Para peneliti terdahulu berusaha untuk mencari cara bagaimana menyelesaikan permasalahan mengenai estimasi ukuran populasi dengan objek yang banyak dan liar. Penelitian yang berkaitan dengan estimasi populasi salah satunya dilakukan oleh Laplace pada tahun 1802. Laplace mengkaji mengenai estimasi populasi penduduk perancis sekitar 28.328.612 orang. Laplace menghitung angka ini menggunakan jumlah kelahiran pada tahun sebelumnya dan data sensus selama tiga tahun pada masyarakat tertentu. Data sensus dari masyarakat ini menunjukkan bahwa mereka memiliki 2.037.615 orang dan jumlah kelahiran adalah 71.866 orang. Dengan asumsi bahwa sampel merupakan perwakilan dari Perancis, Laplace diproduksi estimasinya untuk seluruh penduduk (Pollock; 1991).

Penelitian yang menerapkan metode *capture-recapture* dilakukan oleh Petersen pada tahun 1894 dan lincoln pada tahun 1930 yang berhasil merumuskan estimator populasi berdasarkan perbandingan hewan dengan yang tertangkap dengan populasi sebenarnya. Estimasi populasi tersebut hanya dilakukan dua kali pengulangan penangkapan. Hasil dari penelitian tersebut yaitu Estimasi Lincoln-Petersen.

Selanjutnya, pada tahun 1938 Schanabel melakukan sensus pada populasi tertutup. Hasil dari penelitian tersebut dikenal juga dengan metode schanabel yang dapat dipergunakan untuk mengestimasi ukuran populasi tertutup yang dilakukan dua atau lebih penangkapan dan menandai objek sampel yang telah tertangkap pada penangkapan sebelumnya.

Tujuan dari metode *capture-recapture* adalah untuk mengestimasi ukuran populasi dengan objek yang banyak dan liar. Penggunaan konsep estimasi populasi ini dapat diaplikasikan pada bidang kesehatan, ekologi, epidemilogi, sosiologi dan bidang. Sebagai contoh, pada bidang ekologi, yang berkaitan dengan populasi hewan liar, estimasi populasi menjadi masalah yang menantang karena perilaku anggota populasi tersebut. Beberapa studi kasus pada bidang biologi dan ekologi, mengenai estimasi hewan, sangat memerlukan taksiran yang tepat dan akurat mengenai jumlah anggota populasi suatu wilayah. Sumbangan pemikiran mengenai penaksiran ini dapat dijadikan sebagai referensi untuk melindungi lingkungan seperti hutan, lautan, dan sumber daya yang lain yang berhubungan langsung dengan hewan.

Oleh karena itu, pada artikel ini akan dikaji estimator model M_c dengan model M_t untuk mengestimasi ukuran populasi tertutup dalam metode *Capture-Recapture* serta memahami penerapan metode tersebut dengan teknik *CMRR* untuk mengestimasi ukuran populasi paus bungkuk *Megaptera novaeangliae* dan tupai *(Eutamias Minimus)*.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Salah satu cara untuk menentukan estimator titik dari parameter yang tidak diketahui yaitu dengan metode maksimum likelihood. Menurut Widiharih (2009) sejauh ini metode maksimum likelihood merupakan metode yang paling popular dalam menghasilkan estimator. Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel random dari populasi dengan densitas $f(x|\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ fungsi likelihood didefinisikan dengan :

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k|X) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

Bila fungsi likelihood ini terdiferensialkan dalam $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$, maka calon estimator maksimum likelihood yang mungkin adalah harga-harga $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k)$ sedemikian sehingga :

$$\frac{\partial^2 L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k|X)}{\partial \theta_i^2}\Big|_{\theta_i=\hat{\theta}_i} < 0$$

Pada beberapa kasus dimana diferensi digunakan, akan lebih mudah bekerja pada logaritma alam (ln) dari $L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k|X)$ yaitu: $l = \log L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k|X)$. Hal ini dimungkinkan karena fungsi logaritma naik tegas pada $(0, \infty)$ yang berarti bahwa $L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k|X)$ dan $l = \log L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k|X)$ mempunyai ekstrem yang sama. Jelasnya untuk menentukan estimator maksimum likelihood dari $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Tentukan fungsi likelihood :

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k|X) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

2. Bentuk log likelihood :

$$l = \log L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k|X)$$

3. Tentukan turunan dari

$l = \log L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k|X)$ terhadap $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$:

$$\frac{\log \partial(L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k|X))}{\partial \theta_i} \; u \qquad i = 1,2, \dots, k$$

4. Bentuk persamaan likelihood :

$$\frac{\partial \log(L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k|X))}{\partial \hat{\theta}_i} = 0 \; u \qquad i = 1,2, \dots, k$$

Metode *Capture-Recapture* merupakan suatu metode yang dipergunakan untuk menaksir ukuran populasi dengan teknik *Capture*, *Marking*, *Release*, *Recapture* (CMRR) yaitu menangkap, menandai, melepaskan, dan menangkap kembali sampel sebagai metode pengamatan populasi.

1. Menangkap (*capture*)

Menangkap dapat diartikan sebagai pengambilan sampel dalam populasi tertentu. Pada umumnya dalam teknik ini diperlukan jebakan untuk populasi yang bersifat liar.

2. Menandai (*marking*)

Setelah objek sampel tertangkap, selanjutnya objek sampel tersebut diberi tanda. hal ini dilakukan agar menjadi pembeda dengan anggota populasi yang lain yang belum/tidak tertangkap.

3. Melepaskan (*realease*)

Setelah objek sampel diberi tanda, objek sampel tersebut selanjutnya dilepaskan kembali dan berbaur dengan anggota populasi yang lain.

4. Menangkap kembali (re*capture*)

Menangkap kembali hal ini mempunyai arti mengambil sampel kembali. Terdapat perbedaan untuk penangkapan kembali ini karena ada kemungkinan anggota populasi yang tertangkap merupakan objek sampel sudah ditangkap sebelumnya yang dibedakan dengan tanda.

Metode *Capture-Recapture* ini merupakan metode yang umumnya dipergunakan untuk menentukan taksiran ukuran populasi hewan yang liar dan perpindahan yang cepat. Estimasi populasi hewan termasuk hal yang penting dikaji dalam aplikasi statistika dan ekologi (Otis dkk. 1978).

Asumsi-asumsi yang harus dipenuhi pada saat menggunakan metode *Capture-Recapture*. Menurut Otis dkk. (1978) yaitu:

a) Populasi tertutup

Asumsi ini pertama kali disyaratkan oleh Feller dengan tujuan agar model tersebut menjadi pendekatan yang baik atau jadi gambaran utuh (*snapshot)* dari ukuran populasi sebenarnya (Feller, 1950). Asumsi ini harus dipenuhi secara tegas walaupun pada kenyataan sulit terpenuhi. Apabila kondisi seperti kematian saat menjebak hewan atau perpindahan anggota populasi yang tidak disengaja, maka kondisi itu tidak akan melanggar asumsi populasi tertutup.

b) *Marking* (tanda)

Metode *Capture-Recapture* menjadi unik karena ada proses menandai sampel. Misalkan pada berbagai jenis burung dan unggas tanda dapat berupa gelang yang dipakaikan pada kaki burung atau unggas, atau pada berbagai hewan mamalia dapat berupa kalung yang dipakaikan pada leher hewan mamalia tersebut.

c) Semua anggota populasi bertanda harus dicatat pada setiap penangkapan ke *j*.

Asumsi ini dapat dipenuhi dengan mudah dengan cara mencatat setiap data yang diperlukan dalam proses estimasi.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Model M_o merupakan model yang paling sederhana diantara model-model analisis data *Capture-Recapture*. Pada model M_o semua anggota populasi mempunyai peluang yang sama untuk ditangkap pada setiap kesempatan penangkapan, serta setiap kesempatan penangkapan tidak mempengaruhi peluang ditangkap.

Kajian mengenai distribusi peluang dari himpunan setiap kesempatan penangkapan telah dikaji oleh darroch pada tahun 1958 (David L Otis, 1978).

Beberapa notasi yang akan dipergunakan adalah sebagai berikut:

1. N menyatakan banyaknya anggota populasi yang sesungguhnya.
2. M_{t+1} menyatakan jumlah hewan berbeda tertangkap selama penelitian.

$$M_{t+1} = \sum_{j}^{t+1} m_j$$

3. n_j menyatakan banyak penangkapan pada penangkapan ke-*j*, $j = 1,2\ldots,t$.

4. $n.$ menyatakan total penangkapan

$$n. = \sum_{j=1}^{t} n_j$$

p_j menyatakan peluang setiap hewan tertangkap sehingga $p_j = 1 - q_j$ dimana $j = 1,2, \dots t$. Asumsi yang diambil adalah $p_1 = p_2 = \cdots = p_t$ dengan t banyak pengambilan sampel. Oleh karena itu, model M_0 ini distribusi populasinya akan merupakan distribusi multinomial dengan fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:
Jadi distribusi peluang penangkapan pada model M_0 yaitu :

$$P[\{X_\omega\}] = \frac{N!}{[\prod_\omega X_\omega!](N - M_{t+1})!} p^{n.} (1-p)^{t. \; -n.}$$

Fungsi log-likelihood dari distribusi Multinomial adalah sebagai berikut:

$$\ln L(N, p|\boldsymbol{X}) = \ln\left(\frac{N!}{(N - M_{t+1})!}\right) + (n.)\ln(p) + (t. \; - n.).\ln(1-p) \quad (1)$$

dimana $p \in [0,1]$ dan $N \in \mathbb{N} = \{M_{t+1}, M_{t+1} + 1, M_{t+1} + 2, \dots\}$.

Berdasarkan fungsi log-likelihood tersebut, selanjutnya akan menentukan estimator dari p dengan memisalkan nilai N sehingga:

$$\frac{\partial}{\partial} \ln (p|N, \boldsymbol{X}) = 0$$

Didapatkan

$$p = \frac{n.}{t.} \qquad (2)$$

Selanjutnya substitusi (2) ke (1) diperoleh:

$$L\left(\hat{p}\left(\hat{N}\right)\middle|N, \boldsymbol{X}\right) = \frac{N!}{(N - M_{t+1})!}\left(\frac{n.}{t.}\right)^{n.}\left(1 - \frac{n.}{t.}\right)^{t. \; -n.}$$

$$= \frac{N!}{(N - M_{t+1})!}\left(\frac{(n.)^{n.}}{(t. \;)^{t}}\right)(t. \; - n.)^{t. \; -n.}$$

kedua ruas persamaan menggunakan fungsi *ln*

$$\ln L\left(\hat{p}\left(\hat{N}\right)\middle|N, \boldsymbol{X}\right) = \ln\left(\frac{N!}{(N - M_{t+1})!}\right) + (n.)\ln(n.) + (t. \; - n.)\ln(t. \; - n.) - t \ln(t. \;)$$

Untuk sekumpulan data yang diberikan, penentuan melalui N ini dilakukan untuk menemukan estimator maksimum likelihood $(\hat{N})$ dengan menentukan nilai dari setiap taksiran awal dimana $\hat{N} \epsilon \mathcal{N}$ dengan $\mathcal{N}$ menyatakan himpunan taksiran awal ukuran populasi. Selanjutnya, nilai tersebut digunakan dalam perhitungan estimasi maksimum likelihood menggunakan (David L Otis, 1978).

$$\ln L(\hat{N}, \hat{p}(\hat{N})|\boldsymbol{X}) = \max_{N \in \mathbb{N}} \left[\max_{p \in [0,1]} \ln L(p|N, \boldsymbol{X}) \right]$$
$$= \max_{N \in \mathbb{N}} \left[\ln L(\hat{p}(\hat{N})|N, \boldsymbol{X}) \right]$$
$$= \max_{N \in \mathbb{N}} \left[\ln \left(\frac{N!}{(N - M_{t+1})!} \right) + (n.)\ln(n.) + (tN - n.)\ln(tN - n.) - tN \ln(tN) \right]$$

Menurut Otis, dkk. (1978) yang didasarkan pada simulasi yang dibuktikan secara numerik, bias pada estimator M_c ditentukan oleh besaran nilai peluang penangkapan dan banyak penangkapan pada penelitian. Apabila nilai peluang penangkapan lebih dari sama dengan 0,10 dan $t \geq 5$ maka bias relatif pada 0-15%. Sedangkan apabila nilai penangkapan lebih kecil dari 0,10 dan $t < 5$ maka bias relatif pada 15-20%.

Menurut J. N Darroch (1958) varians *asymptotic* dari $\hat{N}$ untuk model M_c dengan kesamaan nilai peluang pada setiap kesempatan penangkapan yaitu :

$$Var(\hat{N}) = \hat{N}[(1-p)^{-t} - t(1-p)^{-1} + t - 1]^{-1}$$

dan standar error nya adalah

$$SE(\hat{N}) = \sqrt{\hat{N}[(1-p)^{-t} - t(1-p)^{-1} + t - 1]^{-1}}$$

Model M_t merupakan model yang bergantung pada peluang penangkapan bervariasi terhadap waktu atau kesempatan penangkapan dalam analisis data *capture-recapture*. Semua anggota populasi memiliki peluang yang bervariasi untuk ditangkap pada setiap kesempatan penangkapan dan setiap kesempatan penangkapan mempengaruhi peluang ditangkap.

Darroch pada tahun 1958 telah mengkaji untuk mendapatkan model yang tepat untuk situasi tersebut. Dari hasil kajian Darroch, kita dapat menuliskan distribusi peluang dari himpunan setiap kesempatan penangkapan.

Beberapa notasi yang akan dipergunakan adalah sebagai berikut:

1. N menyatakan banyaknya anggota populasi yang sesungguhnya.
2. u_j menyatakan banyaknya hewan baru tidak bertanda yang tertangkap pada kesempatan penangkapan ke-*j* dimana $j = 1,2,3 \ldots t$.
3. M_{t+1} menyatakan jumlah hewan berbeda tertangkap selama penelitian.

$$M_{t+1} = \sum_{j}^{t} u_j$$

4. n_j menyatakan banyak penangkapan pada penangkapan ke-*j*, $j = 1,2 \ldots, t$.

5. n menyatakan total penangkapan

$$n = \sum_{j=1}^{t} n_j$$

6. p_j menyatakan peluang setiap hewan tertangkap sehingga $p_t = 1 - q_t$ dimana $j = 1,2, \ldots t$. Dimana $p_1 \neq p_2 \neq \cdots \neq p_5$ atau paling tidak, ada satu peluang penangkapan yang berbeda dengan peluang penangkapan lainnya.

Oleh karena pada model M_t ini dilakukan beberapa kali penangkapan maka distribusi populasinya akan merupakan distribusi multinomial dengan fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

Misalkan peluang hewan tidak tertangkap ditentukan dengan menggunakan perumusan sebagai berikut:

$$\prod_j^t q_j = Q$$

sedangkan peluang hewan tertangkap pada $1, \ldots, t$ hari ditentukan dengan perumusan sebagai berikut :

$$\frac{p_1}{q_1} \ldots \frac{p_t}{q_t} Q = \prod_j^t p_j$$

Sehingga :

$$P[\{X_\omega\}] = \frac{N!}{[\prod_\omega X_\omega!](N - M_{t+1})!} Q^{N - M_{t+1}} \prod_j^t p_j^{n_j}$$

dimana $0 \leq X_\omega \leq N$ sehingga $0 \leq M_{t+1} = n_j \leq N$.

selanjutnya, perhatikan

$$\begin{aligned}
Q^{N - M_{t+1}} \prod_j^t p_j^{n_j} &= \frac{(\prod_j^t q_j)^N}{(\prod_j^t q_j)^{M_{t+1}}} \prod_j^t p_j^{n_j} \\
&= \frac{(\prod_j^t q_j)^N}{(\prod_j^t q_j)^{n_j}} \prod_j^t p_j^{n_j} \\
&= \left(\prod_j^t q_j\right)^N \frac{\prod_j^t p_j^{n_j}}{\left(\prod_j^t q_j\right)^{n_j}} \\
&= \left(\prod_j^t q_j\right)^N \left(\prod_j^t q_j\right)^{-n_j} \prod_j^t p_j^{n_j} \\
&= \prod_{j=1}^t p_j^{n_j} (1 - p_j)^{N - n_j}
\end{aligned}$$

Sehingga (3) dapat ditulis :

$$P[\{X_\omega\}] = \frac{N!}{[\prod_\omega X_\omega!](N - M_{t+1})!} \prod_{j=1}^t p_j^{n_j} (1 - p_j)^{N - n_j}$$

Fungsi log-likelihood dari distribusi Multinomial adalah sebagai berikut:

$$\ln L(N, \boldsymbol{p}|\boldsymbol{X}) = \ln\left(\frac{N!}{(N-M_{t+1})!}\right) + \sum_{j=1}^{t} n_j \ln\left(p_j\right) + \sum_{j=1}^{t}(N-n_j)\ln(1-p_j)$$

Dimana $p_j \in [0,1]$ untuk setiap $j = 1,2,3\ldots,t$. dan $N \in \mathbb{N} = \{M_{t+1}, M_{t+1}+1, M_{t+1}+2, \ldots\}$. (4)

Berdasarkan fungsi log-likelihood tersebut, selanjutnya akan menentukan estimator dari p dengan memisalkan nilai N sehingga:

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\ln(\boldsymbol{p}|N, \boldsymbol{X}) = 0, \qquad j = 1,2,3\ldots,t.$$

Diperoleh :

$$\hat{p_j} = \frac{n_j}{\mathbb{N}} \qquad (5)$$

substitusi (5) ke (4), sehingga diperoleh :

$$L\left(\hat{N}_t, \hat{p}_1\left(\hat{N}_t\right), \ldots, \hat{p}_t\left(\hat{N}_t\right)\middle|\boldsymbol{X}\right)$$

$$= \frac{N!}{(N-M_{t+1})!}\prod_{j=1}^{t} {p_j}^{n_j}(1-p_j)^{N-n_j}$$

$$= \frac{N!}{(N-M_{t+1})!}\prod_{j=1}^{t}\left(\frac{{n_j}^{n_j}}{N^N}\right)(N-n_j)^{N-n_j}$$

Selanjutnya, kedua ruas persamaan menggunakan fungsi *ln*

$$\ln\left(\hat{N}_t, \hat{p}_1\left(\hat{N}_t\right), \ldots, \hat{p}_t\left(\hat{N}_t\right)\middle|\boldsymbol{X}\right)$$

$$= \ln\frac{N!}{(N-M_{t+1})!} + \sum_{j=1}^{t} n_j\ln(n_j) + \sum_{j=1}^{t}\left(N-n_j\right)\ln\left(N-n_j\right) - t\ln(N)$$

Untuk sekumpulan data yang diberikan, penentuan melalui N ini dilakukan untuk menemukan estimator maksimum likelihood $(\hat{N})$ dengan menentukan nilai dari setiap taksiran awal dimana $\hat{N}\epsilon\mathcal{N}$ dengan $\mathcal{N}$ menyatakan himpunan taksiran awal ukuran populasi. Selanjutnya, nilai tersebut digunakan dalam perhitungan estimasi maksimum likelihood (David L Otis, 1978).

$$\ln L\left(\hat{N}_t, \hat{p}_1\left(\hat{N}_t\right), \ldots, \hat{p}_t\left(\hat{N}_t\right)\middle|\boldsymbol{X}\right) = \max_{N\in\mathbb{N}}\left[\max_{p_j\in[0,1]}\ln L(p_1, \ldots, p_t|N, \boldsymbol{X})\right]$$

$$= \max_{N\in\mathbb{N}}\left[\ln L\left(\hat{p}_1\left(\hat{N}_t\right), \ldots, \hat{p}_t\left(\hat{N}_t\right)|N, \boldsymbol{X}\right)\right]$$

$$= \max_{N\in\mathbb{N}}\left[\ln\left(\frac{N!}{(N-M_{t+1})!}\right) + \sum_{j=1}^{t} n_j\ln(n_j) + \sum_{j=1}^{t}\left(N-n_j\right)\ln\left(N-n_j\right) - t\ln(N)\right]$$

Menurut David L Otis (1978) yang didasarkan pada simulasi yang dibuktikan secara numerik, bias pada estimator M_t ditentukan oleh besaran nilai peluang penangkapan dan banyak penangkapan pada penelitian.

Apabila nilai rata-rata peluang penangkapan selama t waktu penelitian; lebih dari sama dengan 0,10 maka bias $\hat{N}$ tidak signifikan. Dalam hal ini berarti, $\hat{N}$ jadi estimator tak bias bagi N. Akan tetapi apabila nilai rata-rata peluang penangkapan selama t waktu penelitian; kurang dari 0,10 maka bias $\hat{N}$ signifikan. Dalam hal ini berarti, $\hat{N}$ jadi estimator tak bias bagi N.

Menurut Darroch pada tahun 1959, varians *asymptotic* dari $\hat{N}$ yaitu :

$$V\left(\hat{N}\right) = \hat{N}\left[\frac{1}{\prod_{j=1}^{t}(1-\hat{p}_j)} + t - 1 - \sum_{j=1}^{t}(1-\hat{p}_j)^{-1}\right]^{-1}$$

dan standar error nya adalah

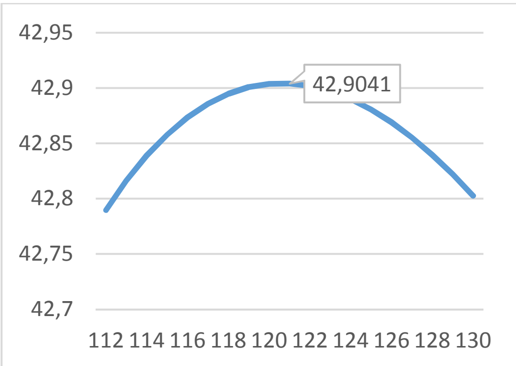
$$S\left(\hat{N}_t\right) = \sqrt{\hat{N}_t\left[\frac{1}{\prod_{j=1}^{t}(1-\hat{p}_j)} + t - 1 - \sum_{j=1}^{t}(1-\hat{p}_j)^{-1}\right]^{-1}}$$

1. MODEL M_U

Data diambil dari Palsboll et all (1997) dalam (Krebs, 1999) tentang eksperimen capture-recapture dalam hal mengestimasi populasi dengan objek penelitian yaitu paus bungkuk, Megaptera novaeangliae di Samudera Atlantik Utara dengan $M_6 = 65$, $t = 5$, $n. = 86$.

Misal $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel random dari populasi paus bungkuk dan taksiran awal ukuran populasi yaitu $N \in [112,130] \subset \mathbb{N}$.

Dengan menentukan dugaan penaksir sementara 112 maka diperoleh nilai taksiran dengan $L\left(\hat{N}, \hat{p}\left(\hat{N}\right)\middle|X\right)$



Grafik 4.1 Nilai fungsi maksimum likelihood estimator model M_G

Dari grafik 4.1, diperoleh bahwa $\max\left(\ln L\left(\hat{N} \middle| p(\hat{N}), X\right)\right) = 42{,}9041$. Nilai tersebut dicapai pada saat estimator $\hat{N} = 121$. Sehingga hal ini berarti bahwa estimator populasi paus bungkuk yaitu 121 ekor.

Nilai peluang penangkapan paus pada setiap periode sampel dapat ditentukan oleh rumus :

$$\hat{p} = \frac{n.}{tN} = \frac{86}{5(121)} = 0{,}1421$$

Hal ini berarti bahwa pada setiap kesempatan penangkapan nilai kemungkinan tertangkapnya paus bungkuk yaitu 0,1421=14,21%. Selanjutnya, bias pada estimator $\hat{N} = 121$ berada diantara 0%-15% atau diabaikan karena $\hat{p} = 0{,}1421 \geq 0{,}10$ d $t = 6 > 5$.

Varians yang diperoleh berdasarkan estimasi ukuran populasi paus bungkuk dengan Model M_c adalah sebagai berikut :

$$V \left(\hat{N}\right) = 373{,}8167$$

Standar Error yang diperoleh berdasarkan estimasi ukuran populasi paus bungkuk dengan Model M_c adalah sebagai berikut :

$$S \left(\hat{N}\right) = 19{,}3343$$

Interval kepercayaan yang diperoleh berdasarkan estimasi ukuran populasi paus bungkuk adalah sebagai berikut :

$$\hat{N} \pm 1{,}96(S) = 121 \pm 37{,}8953$$

$$83{,}1046 < \hat{N} < 158{,}8953$$

Sebagai perbandingan hitungan manual hasil estimasi dengan proses pengolahan data menggunakan program CAPTURE secara *online* yang bisa diakses di *http://www.mbr-pwrc.usgs.gov/software/capture.html.*

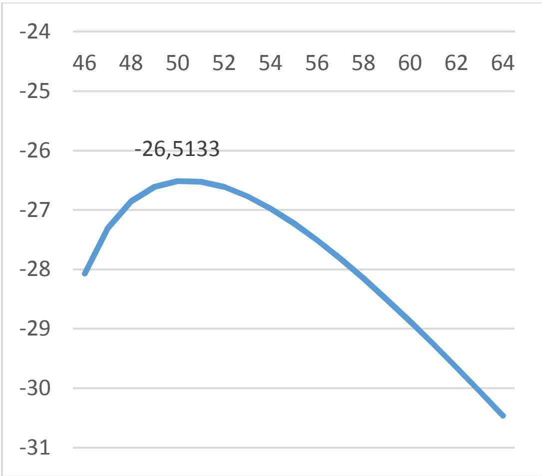
2. MODEL M_t

Data diambil dari V. Reid (1975) dalam (Xu, 2012) tentang eksperimen capture-recapture dengan objek penelitian yaitu tupai, Eutamias Minimus. Penelitian ini dilakukan enam hari.

Kesempatan penangkapan	1	2	3	4	5	6
Banyak tupai tertangkap	7	15	16	24	19	7
Total tupai yang ditandai tertangkap	45					

Tabel 1 Data penangkapan tupai, V.Reid

Misal $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel random dari populasi tupai dan taksiran awal ukuran populasi yaitu $N \in [46,64] \in \mathbb{N}$. Dengan menentukan taksiran sementara 46 maka diperoleh nilai taksiran dengan I: $L(\hat{N}_I, \hat{p}_1(\hat{N}_I), \dots, \hat{p}_I(\hat{N}_I) | X)$



Grafik Nilai fungsi maksimum likelihood estimator model M_I

Dari grafik, diperoleh bahwa $\max(\ln L(p_j(\hat{N}) | \hat{N}, X)) = -26{,}5133$. Nilai tersebut dicapai pada saat estimator $\hat{N} = 50$. Sehingga hal ini berarti bahwa estimator populasi tupai yaitu 50 ekor.

Nilai peluang penangkapan tupai pada setiap periode sampel dapat ditentukan oleh rumus :

$$\hat{p}_j = \frac{n_j}{\hat{N}}$$

$$di \qquad j = 1{,}2 \dots t$$

$$\hat{p}_1 = \frac{n_1}{\hat{N}} = \frac{7}{50} = 0{,}14$$

Hal ini berarti bahwa pada kesempatan pertama penangkapan nilai kemungkinan tertangkapnya tupai yaitu 14%.

$$\hat{p}_2 = \frac{n_2}{\hat{N}} = \frac{15}{50} = 0{,}30$$

Hal ini berarti bahwa pada kesempatan kedua penangkapan nilai kemungkinan tertangkapnya tupai yaitu 30%.

$$\hat{p}_3 = \frac{n_3}{\hat{N}} = \frac{16}{50} = 0{,}32$$

Hal ini berarti bahwa pada kesempatan ketiga penangkapan nilai kemungkinan tertangkapnya tupai yaitu 32%.

$\hat{p}_4 = \frac{n_4}{\hat{N}} = \frac{24}{50} = 0{,}48$

Hal ini berarti bahwa pada kesempatan keempat penangkapan nilai kemungkinan tertangkapnya tupai yaitu 48%.

$\hat{p}_5 = \frac{n_5}{\hat{N}} = \frac{19}{50} = 0{,}38$

Hal ini berarti bahwa pada kesempatan kelima penangkapan nilai kemungkinan tertangkapnya tupai yaitu 38%.

$\hat{p}_6 = \frac{n_6}{\hat{N}} = \frac{7}{50} = 0{,}14$

Hal ini berarti bahwa pada kesempatan keenam penangkapan nilai kemungkinan tertangkapnya tupai yaitu 14%.

Rata-rata nilai peluang penangkapan yaitu :

$$R \quad - R \quad = 0{,}29$$

Selanjutnya, bias pada estimator $\hat{N} = 50$ berada diantara 0%-15% atau diabaikan karena $R \quad - r \quad \hat{p} = 0{,}29 \geq 0{,}10$.

Varians yang diperoleh berdasarkan estimasi ukuran populasi tupai dengan Model M_t adalah sebagai berikut :

$$\hat{V}a\ (\hat{N}_t) = 9{,}9013$$

Standar Error yang diperoleh berdasarkan estimasi ukuran populasi tupai dengan Model M_t adalah sebagai berikut :

$$S\ (\hat{N}) = 3.1466$$

Interval kepercayaan dengan $\alpha = 90\%$ adalah sebagai berikut :

$$\hat{N} \pm 1{,}96(3.1466) = 50 \pm 6{,}1674$$

$$43{,}8326 < \hat{N} < 56{,}1674$$

Sebagai perbandingan hitungan manual hasil estimasi dengan proses pengolahan data menggunakan program CAPTURE secara *online* yang bisa diakses di <u>*http://www.mbr-pwrc.usgs.gov/software/capture.html.*</u>

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Model M_t merupakan model yang paling sederhana diantara model-model dalam analisis data *capture-recapture*. Semua anggota populasi memiliki peluang yang sama untuk ditangkap pada setiap kesempatan penangkapan dan setiap kesempatan penangkapan tidak mempengaruhi peluang ditangkap. Sehingga, penulis dapat menyimpulkan parameter-parameter dalam model M_t sebagai berikut :

1. Distribusi Peluang

$$P[\{X_\omega\}] = \frac{N!}{[\prod_\omega X_\omega!](N-M_{t+1})!} p^{n.}(1-p)^{t. \ -n.}$$

2. Probabilitas penangkapan

$$\hat{p} = \frac{n.}{t}$$

3. Estimator ukuran populasi

Pencarian melalui taksiran awal $\hat{N}$ ditentukan oleh peneliti. kemudian digunakan dalam perhitungan estimasi maksimum likelihood menggunakan persamaan.

$$\ln L(\hat{N}, \hat{p}(\hat{N})|X) = \max_{N \in \mathbb{N}} \left[\ln\left(\frac{N!}{(N-M_{t+1})!}\right) + (n.)\ln(n.) + (t. \ - n.)\ln(t. \ - n.) - t\ln(t. \ ) \right]$$

Estimator *N* dicapai saat nilai fungsi ln Maksimum Likelihood tercapai.

Model M_t merupakan model yang bergantung pada peluang penangkapan dalam analisis data *capture-recapture*. Semua anggota populasi memiliki peluang yang bervariasi untuk ditangkap pada setiap kesempatan penangkapan dan setiap kesempatan penangkapan mempengaruhi peluang ditangkap. Sehingga, penulis dapat menyimpulkan parameter-parameter dalam model M_c sebagai berikut :

1. Distribusi Peluang

$$P[\{X_\omega\}] = \frac{N!}{[\prod_\omega X_\omega!](N-M_{t+1})!} \prod_{j=1}^{t} p_j^{n_j}(1-p_j)^{N-n_j}$$

2. Probabilitas penangkapan

$$\hat{p_j} = \frac{n_j}{N}$$

3. Estimator ukuran populasi

Pencarian melalui taksiran awal $\hat{N}$ ditentukan oleh peneliti. kemudian digunakan dalam perhitungan estimasi maksimum likelihood menggunakan persamaan

$$\ln L(\hat{N}_t, \hat{p}_1(\hat{N}_t), \dots, \hat{p}_t(\hat{N}_t)|X) = \max_{N \in \mathbb{N}} \left[\ln\left(\frac{N!}{(N-M_{t+1})!}\right) + \sum_{j=1}^{t} n_j \ln(n_j) + \sum_{j=1}^{t} (N-n_j)\ln(N-n_j) - t\ln(N) \right]$$

Estimator *N* dicapai saat nilai fungsi ln Maksimum Likelihood tercapai

Penerapan Model M_c pada penghitungan populasi paus bungkuk, *Megaptera novaeangliae* yang menggunakan pendekatan model M_c, dengan taksiran awal $\hat{N} = 112$ maka diperoleh $\ln L(\hat{N}, \hat{p}(\hat{N})|X) = 42{,}9041$ dicapai saat

$\hat{N} = 121$. Artinya estimasi ukuran populasi paus bungkuk dengan model M_c adalah sekitar 121 paus.

Model M_t diterapkan pada penghitungan populasi tupai, *Eutamias Minimus* yang menggunakan pendekatan model M_t, dengan taksiran awal $\hat{N} = 46$ maka diperoleh $\ln L(\hat{N}, \hat{p}(\hat{N}) | X) = 42{,}9041$ dicapai saat $\hat{N} = 50$. Artinya estimasi ukuran populasi tupai dengan model M_t adalah sekitar 50 tupai.

Penggunaan prosedur estimasi populasi hewan seperti yang dijelaskan sebelumnya bertujuan untuk mengetahui ukuran populasi hewan liar dan hewan yang langka. Sehingga, dapat direkomendasikan hasil penelitian selanjutnya kepada instansi pemerintah yang bertugas melindungi hewan langka.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Arikunto, S. (2006). Prosedur Penelitian Suatu Pendekatan Praktik, Jakarta : Rineka Cipta.

[2] Carothers, A.D. (1971). *An examination and extension of Leslie's test of equal catchability. Biometrics* 27(3):615-630.

[3] Cormack, R. M. (1968). *The statistics of capture-recapture methods, Oceanografi*. Mar. Biol. Annu. Rev. 6, pp. 455-506.

[4] Darroch, J. (1958). *The Multiple-Recapture Census.* Manchester: Oxford University Press.

[5] Feller, W. (1950). *An introduction to probability theory and its applications* Vol. 1. John Wiley & Sons, Inc., New York, N.Y. 509 pp.

[6] Hadisubroto, T. 1989. Ekologi Dasar. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Jakarta.

[7] Herrhyanto, N. (2013). *Statistika Inferensial.* Bandung: Yrama Widya.

[8] Herrhyanto, Nar., dan Tuti Gantini. (2011). *Pengantar Statistika Matematis.* Bandung: Yrama Widya.

[9] J. Krebs, C. (2014). *Ecological Methodology*. Vancouver: University of British Columbia.

[10] Nana Sudjana., & Ibrahim. (2004). Penelitian dan penilaian pendidikan. Bandung: sinar Baru Algensindo.

[11] Olvido, A. E. (2005). *Introduction to mark-recapture census methods using the seed beetle, Callosobruchus maculatus*. *Association for Biology Laboratory Education*.

[12] Pollock, K. H. (1991). *Modeling capture, recapture and removal statistics for estimation of demographic parameters for fish and wildlife populations:past, present, and future. Journal of the American Statistical Association*. 86.

[13] Report, I. I. (2012-2013). *Breeding numbers of great cormorants.* Aarhus: Aarhus University, DCE – Danish Centre for Environment and Energy.

[14] Robson., and H. A. Regier. (1964). *Sample size in Petersen mark-recapture experiments*. Trans. Amer. Fish. Soc 93(3):215-226.

[15] Ruswahyuni. (2010). Populasi dan Keanekaragaman Makrobenthos Pada Perairan Tertutup dan Terbuka di Teluk Awur Jepara. 2:(2): 11–20.

[16] Seber, G. A. F. : *The estimation of animal abundance and related parameters*. Griffin, London.

[17] Sugiyono. (2008). Metode Penelitian Kuantitatif Kualitatif dan R&D. Bandung Alfabeta.

[18] Tanpa nama. (2016, Februari 9). Burung Pecuk. Retrieved from pondok burung: http://www.pondokburung.com/burung-pecuk-ireng.htm.

[19] Widiharih, T. (2009). Buku Ajar Statistika Matematika II. Semarang: Universitas Diponegoro.

[20] Xu, C. (2012). Estimating Population Size with objective Bayesian Methods. *A Dissertation*, 17-19.