RUANG LIPSCHITZ

Muhammad Rifqi Agustian [1)], Rizky Rosjanuardi [2)], Endang Cahya [3)]

[1), 2), 3)] Departemen Pendidikan Matematika FPMIPA UPI

*Surel: Muhammadrifqyagustian@yahoo.co.id

ABSTRAK. Diberikan ruang metrik (X,ρ) dan lapangan F (real atau kompleks). Suatu fungsi

$f:(X,\rho)\to F$

dikatakan fungsi Lipschitz bernilai skalar jika terdapat konstanta $\alpha > 0$ sedemikian sehingga

$\rho(f(p),f(q)) \le \alpha\rho(p,q), \forall p,q \in X$

Ruang Lipschitz $Lip(X)$ adalah ruang dari semua fungsi Lipschitz terbatas bernilai skalar pada X. Didefinisikan penjumlahan dan perkalian skalar pada $Lip(X)$ dengan aturan

$(f+g)(p)=f(p)+g(p)$ dan

$(cf)(p)=cf(p) \quad \forall p\in X, f,g\in Lip(X), \quad c\in F$.

Ruang Lipschitz dilengkapi dengan norm Lipschitz yang didefinisikan sebagai

$$\|f\|_L = max(\|f\|_\infty, L(f)) \quad .$$

Kajian ini mengkaji sifat-sifat dari fungsi Lipschitz bernilai skalar dan hubungannya dengan ruang Banach.

Kata kunci: fungsi Lipschitz, fungsi Lipschitz bernilai skalar, ruang Lipschitz, ruang Banach, norm Lipschitz.

ABSTRACT. Given a metric space (X,ρ) and a field F (real or complex). A function

$f:(X,\rho)\to F$

is said to be scalar-valued Lipschitz function if there exists a constant $\alpha \ge 0$ such that

$\rho(f(p),f(q)) \le \alpha\rho(p,q), \forall p,q \in X$

Lipschitz space $Lip(X)$ is the space of all bounded scalar valued Lipschitz function on X. Addition and scalar multiplication defined on $Lip(X)$ with

$(f+g)(p)=f(p)+g(p)$ and

$(cf)(p)=cf(p) \quad \forall p\in X, f,g\in Lip(X), \quad c\in F$.

Lipschitz space equipped with norm Lipschitz which is defined by

$$\|f\|_L = max(\|f\|_\infty, L(f)) \quad .$$

This study observes the properties of scalar valued Lipschitz function and its relationship with Banach Space.

Keywords: Lipschitz function, scalar valued Lipschitz function, Lipschitz space, Banach space, Lipschitz norm.

1. PENDAHULUAN

Pada tahun 1864 fungsi Lipschitz pertama kali diteliti oleh Rudolf Lipschitz. Rudolf Lipschitz yang beranggapan bahwa fungsi akan gagal memenuhi syarat cukup pada penelitian Dirichlet yang berjudul kekonvergenan deret Fourier pada fungsi periodik. Oleh karena itu Lipschitz berargumen bahwa kondisi kemonotonan Dirichlet bisa diganti dengan suatu kondisi pada fungsi yang lebih kuat dari pada kontinu bagian demi bagian tetapi lebih lemah dari keterdiferensialan yang kemudian disebut dengan kondisi Lipschitz [5].

Teori fungsi Lipschitz juga merupakan salah satu dasar untuk mengembangkan teori-teori yang lain seperti ruang Lipschitz, operator Lipschitz, ketertutupan operator Lipschitz, dan lain-lain. Ruang Lipschitz merupakan salah satu bagian pada ruang Banach. Ciesielsky menunjukkan bahwa ruang Lipschitz isomorfik ke l_∞ yang merupakan ruang Banach [4].

Fungsi Lipschitz memiliki sifat-sifat yang terkandung di dalamnya terutama pada fungsi Lipschitz bernilai skalar. Fungsi Lipschitz bernilai skalar ini memetakan ruang metrik (X,ρ) ke lapangan real atau kompleks. Lapangan real sangat berperan banyak dalam menentukan sifat-sifat dari fungsi Lipschitz bernilai scalar [2].

Teori-teori Ruang Lipschitz sudah sudah dikembangkan sejak abad ke-19, tetapi dengan perkembangan yang lambat. Walaupun ruang Lipschitz kaya akan teori-teori yang indah. Salah satunya adalah hubungan ruang Lipschitz dengan ruang Banach [2].

Ruang Lipschitz adalah ruang vektor yang berisi fungsi-fungsi Lipschitz bernilai skalar yang dinotasikan dengan $Lip(X)$ dengan norm $\|f\|_L = max(\|f\|_\infty, L(f))$. Ruang Lipschitz merupakan ruang Banach [2].

Selain itu, terdapat ruang Lipschitz dengan ruang metrik terpusat (mebawa titik basisnya) dan memetakan titik basisnya ke 0 yang disebut dengan ruang Lipschitz terpusat $Lip_0(X)$. Ruang Lipschitz terpusat adalah ruang vektor dari semua fungsi Lipschitz bernilai skalar yang mengawetkan titik basisnya. Ruang Lipschitz terpusat juga merupakan ruang Banach dengan norm $L(f)$

[2]. Pada penelitian ini dibahas bagaimana hubungan ruang Lipschitz dengan ruang Banach.

2. FUNGSI LIPSCHITZ

Misalkan (X, ρ_X) dan (Y, ρ_Y) adalah ruang metrik. Suatu fungsi $f : X \to Y$ adalah Lipschitz jika terdapat kontanta $a \geq 0$ sedemikian sehingga

$$\rho_Y(f(p), f(q)) \leq a\, \rho_X(p, q)$$

Untuk semua $p, q \in X$. Dimana bilangan terkecil a adalah bilangan Lipschitz dan notasikan dengan $L(f)$.

Lebih jauh $L(f)$ bisa didefiniskan dengan

$$L(f) = \text{¿}\, p, q \in X \frac{\rho_Y(f(p), f(q))}{\rho_X(p, q)}$$

Teorema 2.1 Misalkan (X, ρ_X) dan (Y, ρ_Y) adalah ruang metrik dan misalkan

$$f \;,\; f_i(i \in I) \;:\; (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$$

Andaikan f_i konvergen titik demi titik ke f. Maka $L(f) \leq^{L(f_i)}$.

Bukti :

Misalkan f_i adalah fungsi Lipschitz sehingga berlaku

$$\rho_Y(f_i(p), f_i(q)) \leq L(f_i)\, \rho_X(p, q)\, \forall\, p, q \in X$$

dimana $L(f_i)$ adalah konstanta Lipschitz. Bagi kedua ruas dengan $\rho_X(p, q)$, diperoleh:

$$\frac{\rho_Y(f_i(p), f_i(q))}{\rho_X(p, q)} \leq L(f_i), \forall\, p, q \in X$$

Ambil limit terhadap i di kedua ruas, sehingga diperoleh:

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\rho_Y(f_i(p), f_i(q))}{\rho_X(p, q)} \leq \lim_{i \to \infty} L(f_i), \forall\, p, q \in X$$

Karena f_i konvergen titik demi titik ke f, berlaku:

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\rho_Y(f_i(p), f_i(q))}{\rho_X(p, q)} = \frac{\rho_Y(f(p), f(q))}{\rho_X(p, q)} \leq L(f_i) \leq \text{¿}\, i\, L(f_i), \forall\, p, q \in X$$

atau singkatnya

$$\frac{\rho_Y(f(p), f(q))}{\rho_X(p, q)} \leq \text{¿}\, i\, L(f_i), \forall\, p, q \in X$$

ambil supremum terhadap $\{p,q\}\in X$ dikedua ruas, sehingga:

$$L(f_i)$$
$$\underset{i\in I}{¿}\ ¿$$
$$¿$$
$$¿$$
$$¿$$
$$\frac{\rho_Y(f(p),f(q))}{\rho_X(p,q)}=L(f)\leq^{¿}\ p,q\in X,\ p\neq q\,¿$$
$$\underset{p,q\in X,p\neq q}{¿}\quad ¿$$

$\forall\, p,q\in X$. terbukti

3. FUNGSI LIPSCHITZ BERNILAI SKALAR

Fungsi Lipschitz bernilai skalar adalah fungsi $f:(X,\rho_X)\rightarrow F$ yang memenuhi kondisi Lipschitz. .Fungsi Lipschitz bernilai skalar memiliki sifat-sifat yang dibahas pada dua proposisi berikut.

Proposisi 3.1 Misalkan (X,ρ_X) ruang metrik dan misalkan f,g dan $f_n(n\in N)$ adalah fungsi Lipschitz dari X ke F . Maka

a. $L(af)=|a|L(f)$ untuk semua $a\in F$;

b. $L(f+g)\leq L(f)+L(g)$;

c. Jika $\sum_{k=1}^{\infty}(f_k)$ konvergen titik demi titik maka

$$L\sum_{k=1}^{\infty}(f_k)\leq\sum_{k=1}^{\infty}L(f_k)$$

Proposisi 3.2 Misalkan X adalah ruang metrik dan $f,g:X\rightarrow F$ dimana f dan g adalah fungsi Lipschitz terbatas, maka.

a. $L(fg)\leq\|f\|_\infty L(g)+\|g\|_\infty L(f)$ dan

b. Jika $|f(p)|\geq\epsilon>0$ untuk semua $p\in X$, maka $L\left(\frac{1}{f}\right)\leq\frac{L(f)}{\epsilon^2}$.

Jika $diam(X)<\infty$ maka hasil dari sebarang dua fungsi Lipschitz bernilai skalar adalah Lipschitz.

Jadi sifat-sifat yang terkandung pada fungsi Lipschitz bernilai skalar adalah homogeny, semi additive, konvergen titik demi titik, perkaliannya terbatas dan invers.

4. RUANG LIPSCHITZ

Definisi 4.1:

1. Misalkan X adalah ruang metrik. Maka $Lip(X)$ adalah ruang vektor dari semua fungsi Lipschitz terbatas bernilai skalar pada X, dengan norm

$$\|f\|_\infty$$
$$(¿, L(f))$$
$$\|f\|_L = max ¿$$

$\|f\|_L$ disebut norm Lipschitz

2. Misalkan X adalah ruang metrik terpusat di 0. Maka $Lip_0(X)$ adalah ruang vektor dari semua fungsi Lipschitz bernilai skalar yang mengawetkan titik basisnya, dengan norm $L(f)$. Dengan kata lain $f \in Lip_0(X) \Leftrightarrow f \in Lip(X)$ dan $f(e)=0$.

Proposisi berikut menjelaskan bahwa ruang Lipschitz dan ruang Lipschitz terpusat adalah ruang Banach.

Proposisi 4.3:

a. $Lip(X)$ adalah ruang Banach, untuk sebarang ruang metrik X.

b. $Lip_0(X)$ adalah ruang Banach, untuk sebarang ruang metrik terpusat X

Bukti:

(a) Misalkan (f_n) barisan di $Lip(X)$ sedemikian sehingga $\sum f_n$ konvergen mutlak di $Lip(X)$, yaitu

$$\sum \|f_n\|_L < \infty$$

Maka, dari definisi $\|.\|_L$ diperoleh $\|f_n\|_L \geq \|f\|_\infty$ dan $\|f_n\|_L \geq L(f)$ sehingga

$$\sum \|f_n\|_\infty \leq \sum \|f_n\|_L < \infty$$

dan

$$\sum L(f_n) \leq \sum \|f_n\|_L < \infty$$

Definisikan $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ maka $\sum f_n$ konvergen titik demi titik ke f karena $\forall x \in X$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)-f(x)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right|\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \text{¿}|f_k(x)|=\sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty$$

saat $n\to\infty$,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \to 0$$

Karena $\sum f_n$ konvergen titik demi titik ke f , maka berdasarkan Lemma 4.2 dan Proposisi 3.3 (c), diperoleh

$$\|f\|_\infty \leq \sum \|f_n\|_\infty \, dan \, L(f)\leq \sum L(f_n)$$

Definisikan $g_n=\sum_{k=1}^{n} f_k$, perhatikan bahwa

$$\|f-g_n\|_\infty=\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\right\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \to 0$$

dan

$$L(f-g_n)=L\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\right)\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} L(f_k)\to 0$$

akibatnya

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k-f\right\|_L=\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\right\|_L \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_L=\sum_{k=n+1}^{\infty} max\{\|f_k\|_\infty, L(f_k)\}\leq\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \to 0\right)+($$

sehingga

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} max\{\|f_k\|_\infty, L(f_k)\}\to 0$$

Jadi $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergen norm ke f dalam norm Lipschitz. Terbukti.

(b) Misalkan (f_n) barisan di $Li\,p_0(x)$ sedemikian sehingga $\sum f_n$ konvergen mutlak di $Li\,p_0(X)$, yaitu

$$\sum L(f_n)<\infty$$

Untuk setiap n dan sebarang $p\in X$ berlaku

$$|f_n(p)|\leq L(f_n)\rho(p,e)$$

Akibatnya

$$\sum |f_n(p)| \leq \sum |f_n(p)| \leq \sum L(f_n)\rho(p,e) < \infty$$
$$\sum |f_n(p)| < \infty$$

Kita tahu bahwa konvergen mutlak mengimplikasikan konvergen titik demi titik. Definisikan $f = \Sigma_{k=1}^{\infty} f_k$, oleh sebab itu berdasarkan Proposisi 3.3 (c) berlaku

$$L(\text{¿¿} k) < \infty,$$
$$f$$
$$L(f) = L\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \text{¿}$$

Menunjukkan $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \in Li\,p_0(X)$.

Definisikan $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, akan dibuktikan bahwa g_n konvergen ke f di $Li\,p_0(X)$. perhatikan bahwa

$$L(f - gn) = L\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\right) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} L(f_k) \rightarrow 0$$

Jadi $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergen ke f dalam norm $Li\,p_0(X)$. Berdasarkan Teorema 2.5.2 $Li\,p_0(X)$ ruang Banach.

Dari proposisi diatas didapat bahwa $Lip(X)$ dan $Li\,p_0(X)$ adalah ruang Banach.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to Real Analysis: Third Edition.* U.S.A: John Willey & Sons Inc.

[2] Weaver, Nik. (1999). *Lipschitz algebras*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd

[3] Kreyzig, Erwin. 1978. *Introductory Functional Analysis with Aplication.* U.S.A: John Willey & Sons Inc.

[4] Pietsch, Albrecht. (2007). *History of Banach Space and Linear Operator.* U.S.A: Birkh *á* user Boston.

[5] Gray, Jeremy. (2010). *The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century.* Switzerland: Springer.

[6] Magginson, Robert E. (1998). *An Introduction to Banach Space Theory*. New York: Springer-Verlag.