

# TEORI DILASI DALAM RUANG HILBERT DAN RUANG BANACH

Annisanti Surachman, Rizky Rosjanuardi<sup>1</sup>, Isnie Yusnitha<sup>2</sup>

Departemen Pendidikan Matematika FPMIPA UPI

\*Surel: annisanti.surachman@student.upi.edu

**ABSTRAK.** Pada artikel ini dibahas teori dilasi dengan ruang Hilbert sebagai ruang pokok dan kaitan antara beberapa teori dilasi yang terdiri dari pemetaan positif lengkap, kontraksi dan ukuran bernilai operator. Selain itu dibahas juga teori dilasi dengan ruang Hilbert sebagai ruang pokok.

**Kata Kunci:** ukuran bernilai operator, pemetaan positif, Teorema Dilasi Naimark, ruang dilasi Hilbert dan ruang dilasi Banach.

**ABSTRACT.** This paper tells about dilation theory with a Hilbert space as an underlying space and associations between some of dilation theory consist of completely positive maps, contraction and operator-valued measure. In addition also tells about dilation theory with a Banach space as an underlying space.

**Key words:** operator-valued measure, positive maps, Naimark's Dilation Theorem, Hilbert dilation space, Banach dilation space.

## 1. PENDAHULUAN

Secara umum dilasi didefinisikan sebagai pembesaran atau penyusutan skala pada semua arah dalam suatu objek. Dilasi untuk pemetaan positif lengkap  $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  adalah pasangan  $(\pi, \mathcal{K})$  yang merupakan representasi dari  $\mathcal{A}$  sedemikian sehingga  $\Phi(a) = P\pi(a)|_{\mathcal{H}}$  untuk setiap  $a \in \mathcal{A}$ .

Teori dilasi pada aljabar operator dimulai dengan 2 artikel dari Naimark yang ditulis dan dipublikasikan pada perang dunia ke-2. Teorema Naimark memaparkan dilasi pada ukuran  $\nu: \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  yang *countably additive* [1]. Kemudian pada tahun 1955 Stinespring merumuskan ulang teorema Naimark untuk ukuran bernilai operator dengan mengganti  $\sigma$ -aljabar  $\mathfrak{X}$  dengan aljabar- $C^*$   $\mathcal{A}$  dan mengganti ukuran  $E$  dengan fungsi linear  $\Phi$  pada  $\mathcal{A}$  [6]. Stinespring

---

<sup>1</sup> Pembimbing 1

<sup>2</sup> Pembimbing 2

menggunakan pendekatan aljabar- $C^*$  dalam teori dilasi dan menggunakannya untuk membuktikan teorema dilasi Naimark. Stinespring juga membuktikan bahwa jika  $\mathcal{A}$  komutatif, maka setiap pemetaan linear pada  $\mathcal{A}$  adalah pemetaan positif lengkap [2]. Teorema Dilasi Stinespring memungkinkan untuk mengatakan bahwa setiap pemetaan positif lengkap memiliki dilasi [5].

Pada tahun 1950, Halmos menunjukkan bahwa setiap kontraksi  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  memiliki dilasi uniter  $uU$  yang beraksi pada ruang Hilbert  $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$  sedemikian sehingga  $A = P_{\mathcal{H}}U|_{\mathcal{H}}$  [1] yang kemudian pada 1953 Sz-Nagy memperluasnya dengan menunjukkan bahwa setiap kontraksi memiliki dilasi uniter berpangkat. Teorema Sz-Nagy ini menunjukkan bahwa setiap operator kontrakasi pada ruang Hilbert  $\mathcal{H}$  merupakan kompresi dari operator uniter pada ruang Hilbert  $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$  [5].

Pada tahun 2010, Deguang Han, dkk., menuliskan atikel yang memuat teori dilasi [4]. Di dalamnya mereka mendefinisikan ruang dilasi Hilbert yang didasarkan pada Teorema Dilasi Naimark untuk ukuran bernilai operator yang kemudian di perumum menjadi ruang dilasi Banach.

Pada umumnya beberapa teori dilasi terfokus pada karakterisasi berbagai kelas dari pemetaan-pemetaan ke  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  sebagai kompresi ke  $\mathcal{H}$  dari pemetaan di  $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ , di mana  $\mathcal{K}$  merupakan ruang Hilbert yang memuat  $\mathcal{H}$  [5]. Teori dilasi ini merupakan teori dilasi dengan ruang Hilbert sebagai ruang pokok. Berdasarkan Teorema Dilasi Naimark, setiap ukuran bernilai operator positif dapat didilasi ke sebuah ukuran bernilai operator yang self-adjoint dan spektral di ruang Hilbert yang lebih besar [4]. Han, dkk [4] membuktikan bahwa hal ini juga berlaku untuk setiap ukuran bernilai operator dalam ruang Banach dengan memaparkan hasil yang serupa dengan Teorema Dilasi Naimark untuk ukuran bernilai operator dengan ruang Banach sebagai ruang pokok dengan menunjukkan bahwa terdapat ruang Banach  $X$ , ukuran bernilai  $\mathcal{B}(X)$   $F$  pada  $(\Omega, \Sigma)$  dan pemetaan linear terbatas  $S$  dan  $T$  sedemikian sehingga  $E(B) = SF(B)T$  dipenuhi untuk setiap  $B \in \Sigma$ .

## 2. METODOLOGI

Penelitian ini bersifat kualitatif dengan fokus kajiannya adalah teori dilasi dalam ruang Banach dan ruang Hilbert. Dalam penelitian ini buku dan jurnal yang dijadikan referensi utama adalah sebagai berikut.

1. Sebuah jurnal dengan judul *Operator-Valued Measure, Dilations, and the Theory of Frames* yang ditulis oleh Deguang Han, Bei Liu, Rui Liu dan David R. Larson pada 2010.
2. Buku dengan judul *A course in Operator Theory* karya John B. Conway.

3. Buku dengan judul *Completely Bounded Maps and Operator Algebras* karya Vern Paulsen.

Penelitian dilakukan di Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia (UPI) dan dilaksanakan selama 3 semester. Penelitian dimulai dengan melakukan studi literatur pada sebuah jurnal dan hingga dipilih konsep dilasi untuk penulisan skripsi ini.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian dan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Pengkajian teori dasar aljabar operator pada semester 6 yang meliputi ruang Banach, ruang Hilbert, proyeksi orthogonal, operator linear, serta aljabar- $\mathcal{C}^*$ .
2. Pengkajian teori dilasi dengan melakukan studi literatur pada jurnal yang telah dijadikan referensi utama. Kemudian membuat daftar konsep-konsep yang diperlukan untuk mempelajari teori dilasi. Hal ini mulai dilakukan pada semester 6 pada mata kuliah kapita selekta.
3. Mencari sumber dan referensi terkait dengan konsep dan teori pada kajian pustaka dan pembahasan yang sesuai dengan tujuan pembahasan penelitian yang akan dilaksanakan.
4. Pengkajian beberapa teorema terkait teori dilasi serta pembuktiannya, ukuran bernilai operator dan pemetaan positif dan pemetaan positif lengkap dalam aljabar- $\mathcal{C}^*$ . Hal ini dilakukan pada semester 7 dan 8.
5. Melakukan pengkajian ulang terhadap konsep-konsep yang menjadi landasan teoritis dan teori dilasi sebagai bahasan utama serta melakukan revisi mengenai keterkaitan kajian pustaka dengan pembahasan, serta korelevanan rumusan masalah dan tujuan pada bab pendahuluan dengan pembahasan dan kesimpulan. Hal ini penulis lakukan pada semester 8 dengan melakukan diskusi dan bimbingan dengan pembimbing skripsi hingga diperoleh hasil penelitian yang optimal.

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 1. Pemetaan Positif Lengkap dan Ukuran Bernilai Operator

Misalkan  $S$  adalah subhimpunan dari aljabar- $\mathcal{C}^*$   $\mathcal{B}$  dan  $\Phi: S \rightarrow \mathcal{B}$  adalah sebuah pemetaan.  $\Phi$  dikatakan *positif* jika  $\Phi$  memetakan elemen-elemen positif di  $S$  ke elemen-elemen positif di  $\mathcal{B}$ . Selanjutnya, definisikan pemetaan  $\Phi_n: M_n(S) \rightarrow M_n(\mathcal{B})$  oleh  $[a_{i,j}] \mapsto \Phi([a_{i,j}]) = [\Phi(a_{i,j})]$ .  $\Phi$  dikatakan *positif*

*lengkap* jika untuk setiap  $\Phi_n$  juga merupakan pemetaan positif. Pemetaan positif lengkap  $\Phi$  dikatakan *terbatas* jika  $\sup_n \|\Phi_n\|$  berhingga dan  $\|\Phi\|_{cb} = \sup_n \|\Phi_n\|$ , di mana  $\|\cdot\|_{cb}$  menotasikan norm pada ruang pemetaan lengkap terbatas.

**Teorema 2.1**<sup>[5]</sup> Misalkan  $\mathcal{B}$  adalah aljabar- $C^*$  dan  $\Phi: C(X) \rightarrow \mathcal{B}$  adalah pemetaan positif. Maka  $\Phi$  adalah pemetaan positif lengkap.

Selanjutnya, misalkan  $E: \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  adalah pemetaan pada adalah ruang kompak Hausdorff  $\Omega$ .  $E$  disebut ukuran bernilai operator jika memenuhi sifat *weakly countably additive*; yaitu jika  $\{B_i\}$  adalah koleksi terhitung dari himpunan Borel yang *disjoint* di mana gabungan  $\{B_i\}$  adalah  $B$ , maka  $\langle E(B)x, y \rangle = \sum_i \langle E(B_i)x, y \rangle, \forall x, y \in \mathcal{H}$ . Ukuran  $E$  dikatakan terbatas jika  $\sup\{\|E(B)\|; B \in \mathfrak{X}\} < \infty$  dan dikatakan regular jika untuk setiap  $x, y \in \mathcal{H}$ , ukuran kompleks yang diberikan oleh  $\mu_{x,y}(B) = \langle E(B)x, y \rangle$  juga ukuran regular.

Jika  $E$  adalah sebuah ukuran bernilai- $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  yang regular terbatas, maka akan diperoleh pemetaan linear terbatas  $\phi: C(\Omega) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  di mana

$$\langle \phi(f)x, y \rangle = \int_{\Omega} f d\mu_{x,y} \quad (*)$$

Sebaliknya, diberikan sebuah pemetaan linear terbatas  $\phi: C(\Omega) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , jika terdefinisi ukuran borel regular  $\{\mu_{x,y}\}$  untuk setiap  $x, y \in \mathcal{H}$ , di bawah persamaan (\*), maka untuk setiap himpunan Borel  $B$ , terdapat operator linear  $E(B)$  yang unik yang didefinisikan oleh persamaan  $\mu_{x,y}(B) = \langle E(B)x, y \rangle$  dan pemetaan  $B \rightarrow E(B)$  yang mendefinisikan ukuran bernilai  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  yang terbatas. Dengan demikian, dapat dilihat korespondensi satu-satu antara pemetaan linear terbatas  $\phi$  dan ukuran bernilai  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  yang regular terbatas  $E$ , sehingga **ukuran dikatakan :**

1. **Spektral** jika  $E(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) = E(\mathcal{B}_1) \cdot E(\mathcal{B}_2)$
2. **Positif** jika  $E(\mathcal{B}) \geq 0$
3. **Self-adjoint** jika  $E(\mathcal{B})^* = E(\mathcal{B})$   
untuk semua himpunan Borel  $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ .

## 2. Teori Dilasi dalam Ruang Hilbert

Jika  $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  adalah pemetaan positif,  $(\pi, \mathcal{K})$  adalah representasi dari  $\mathcal{A}$  dengan  $\mathcal{H} \leq \mathcal{K}$ ,  $P$  adalah proyeksi dari  $\mathcal{K}$  ke  $\mathcal{H}$  dan  $\Phi(a) = P\pi(a)|_{\mathcal{H}}$  untuk setiap  $a \in \mathcal{A}$ , maka  $(\pi, \mathcal{K})$  disebut dilasi dari  $\Phi$ .

**Teorema 2.1**<sup>[5]</sup> Misalkan  $E$  adalah ukuran bernilai- $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  yang regular positif pada  $\Omega$ . Maka terdapat ruang Hilbert  $\mathcal{K}$ , operator linear terbatas  $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  dan ukuran bernilai- $\mathcal{B}(\mathcal{K})$   $F$  yang self-adjoint, regular dan spektral sedemikian sehingga  $E(B) = V^*F(B)V$  untuk  $B \in \mathfrak{X}$ .

**Teorema 2.2**<sup>[3]</sup> Jika  $T$  adalah kontraksi pada ruang Hilbert  $\mathcal{H}$ , terdapat ruang Hilbert  $\mathcal{K}$  yang memuat  $\mathcal{H}$  dan operator uniter  $U$  pada  $\mathcal{K}$  sedemikian sehingga untuk semua  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $T^n = PU^n|_{\mathcal{H}}$  di mana  $P$  adalah proyeksi dari  $\mathcal{K}$  ke  $\mathcal{H}$ .

**Teorema 2.3**<sup>[5]</sup> Jika  $\mathcal{A}$  adalah aljabar- $C^*$  unital dan  $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  pemetaan positif lengkap maka terdapat ruang Hilbert  $\mathcal{K}$ , homomorfisma- $*$  unital  $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K})$  dan operator terbatas  $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  dengan  $\|\Phi(1)\| = \|V\|^2$  sedemikian sehingga  $\Phi(a) = V^*\pi(a)V$ , untuk  $a \in \mathcal{A}$ .

**Teorema 2.4**<sup>[5]</sup> Misalkan  $G$  adalah grup topologi. Jika  $\phi: G \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  adalah pemetaan definit positif lengkap yang *weakly continuous*, maka akan terdapat ruang Hilbert  $\mathcal{K}$ , operator terbatas  $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  dan representasi uniter  $\rho: G \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K})$  yang  $*$ -strongly continuous sedemikian sehingga,  $\phi(g) = V^*\rho(g)V$ , untuk setiap  $g \in G$ . Akibatnya, secara otomatis  $\phi$  menjadi *\*-strongly continuous*.

Berdasarkan Teorema 2.1, didefinisikan ruang dilasi Hilbert untuk ukuran bernilai operator. Misalkan  $(\Omega, \mathfrak{X}, E, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$  adalah sistem ukuran bernilai operator.  $E$  dikatakan memiliki ruang dilasi Hilbert jika terdapat ruang Hilbert  $\mathcal{K}$ , dua buah operator linear terbatas  $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  dan  $S: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$  dan ukuran bernilai idempoten  $F: \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K})$  sedemikian sehingga  $E(B) = SF(B)T$  untuk setiap  $B \in \mathfrak{X}$ .

### 3. Ruang Dilasi Banach

Ruang dilasi Banach untuk ukuran bernilai operator adalah salah satu teori dilasi dengan ruang Banach sebagai ruang pokok yang definisinya merupakan perumuman dari ruang dilasi Hilbert yang didasarkan pada teorema dilasi Naimark untuk ukuran bernilai operator. Untuk dapat menggeneralisasi ruang dilasi Hilbert menjadi ruang dilasi Banach, definisikan ukuran bernilai operator di ruang Banach.

Misalkan  $X$  dan  $Y$  adalah ruang Banach, dan diberikan ruang terukur  $(\Omega, \Sigma)$ . Ukuran bernilai- $\mathcal{B}(X, Y)$  di  $\Omega$  adalah pemetaan  $E: \Sigma \rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$  yang countably additive di weak operator topology; yaitu jika terdapat  $\{B_i\}$  koleksi terhitung dari anggota-anggota  $\Sigma$  yang disjoint di mana gabungan  $\{B_i\}$  adalah  $B$ , maka  $y^*(E(B)x) = \sum_i y^*(E(B_i)x)$ ,  $\forall x \in X$  dan  $y^* \in Y^*$ . Gunakan simbol  $(\Omega, \Sigma, E)$  untuk menotasikan ruang ukuran bernilai operator atau  $(\Omega, \Sigma, E, \mathcal{B}(X, Y))$  untuk menotasikan sistem ukuran bernilai-operator.

Selanjutnya sistem ruang ukuran bernilai operator  $(\Omega, \Sigma, E, \mathcal{B}(X, Y))$  dikatakan memiliki ruang dilasi Banach  $Z$  jika terdapat operator linear terbatas  $S: Z \rightarrow Y$  dan  $T: X \rightarrow Z$  dan ruang ukuran bernilai proyeksi  $(\Omega, \Sigma, F, \mathcal{B}(Z))$  sedemikian sehingga untuk setiap  $B \in \Sigma$ ,  $E(B) = SF(B)T$ .

## 4. KESIMPULAN

Misalkan  $\Omega$  adalah ruang kompak Hausdorff dan  $\mathfrak{X}$  adalah  $\sigma$ -aljabar dari semua subhimpunan Borel di  $\Omega$ . Ukuran bernilai  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  pada  $\Omega$  adalah pemetaan  $E : \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  yang *weakly countably additive*; yaitu jika  $\{B_i\}$  adalah koleksi terhitung dari himpunan Borel yang *disjoint* dengan gabungan  $B$ , maka :

$$\langle E(B)x, y \rangle = \sum_i \langle E(B_i)x, y \rangle, \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Jika  $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  adalah pemetaan positif,  $(\pi, \mathcal{K})$  adalah representasi dari  $\mathcal{A}$  dengan  $\mathcal{H} \leq \mathcal{K}$ ,  $P$  adalah proyeksi dari  $\mathcal{K}$  ke  $\mathcal{H}$  dan  $\Phi(a) = P\pi(a)|_{\mathcal{H}}$  untuk setiap  $a \in \mathcal{A}$ , maka  $(\pi, \mathcal{K})$  disebut dilasi dari  $\Phi$ .

Misalkan  $(\pi, \mathcal{K})$  adalah dilasi pada pemetaan positif lengkap  $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Misalkan pula  $\mathcal{K}_1 = [\pi(a)\mathcal{H}]$  adalah subruang tereduksi yang memuat  $\mathcal{H}$ . Jika  $\pi_1 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K}_1)$  didefinisikan sebagai subrepresentasi  $\pi_1(a) = \pi(a)|_{\mathcal{K}_1}$ , maka  $(\pi_1, \mathcal{K}_1)$  juga merupakan dilasi dari  $\Phi$ .  $(\pi, \mathcal{K})$  merupakan dilasi minimal dengan syarat  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1$  (dan karenanya  $\pi = \pi_1$ ).

Teorema dilasi Stinespring pemetaan positif dalam ruang Hilbert  $\mathcal{H}$  dapat didilasi ke homomorfisma-\* dalam ruang Hilbert  $\mathcal{K}$  di mana  $\mathcal{H}$  merupakan subruang Hilbert dari  $\mathcal{K}$ . Sebagai akibat dari teorema dilasi Stinespring, teorema dilasi Naimark mendilasi sebuah ukuran bernilai operator dalam ruang Hilbert yang regular positif ke ukuran bernilai operator yang regular, *self-adjoint*, dan spektral. Sedangkan Teorema dilasi Sz-Nagy membahas kontraksi pada ruang Hilbert yang didilasi ke sebuah operator uniter pada ruang Hilbert yang lebih besar, teorema ini disebut pula sebagai dilasi uniter pada kontraksi.

Misalkan  $(\Omega, \Sigma, E, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$  adalah sistem ukuran bernilai operator.  $E$  dikatakan memiliki ruang dilasi Hilbert jika terdapat ruang Hilbert  $\mathcal{K}$ , dua buah operator linear terbatas  $S: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  dan  $T: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$  dan ukuran bernilai idempoten  $F: \Sigma \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K})$  sedemikian sehingga  $E(B) = SF(B)T$  untuk setiap  $B \in \mathfrak{X}$ .

Misalkan  $(\Omega, \Sigma)$  ruang terukur,  $X$  dan  $Y$  adalah ruang Banach, dan  $E : \Sigma \rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$  ukuran bernilai operator. Ruang Banach  $Z$  dikatakan ruang dilasi pada ukuran bernilai operator  $(\Omega, \Sigma, E)$  jika terdapat operator linear  $S : Z \rightarrow Y$  dan  $T : X \rightarrow Z$  dan ruang ukuran bernilai proyeksi  $(\Omega, \Sigma, F, \mathcal{B}(Z))$  sedemikian sehingga untuk setiap  $B \in \Sigma$

$$E(B) = SF(B)T.$$

## 5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Arveson, W. (2009). Dilation Theory Yesterday and Today, *A glimpse at Hilbert Space Operator*, 99-123.
- [2] Bunce, J.W. (1987). *Review Completely Bounded Maps and Dilations by Vern I Paulsen*. New York: American Mathematical Society.
- [3] Conway, J. B. (2000). *A course in Opeator Theory*. Rhode Island: American Matheatical Society.
- [4] Han, D., Larson, D. R., Liu, B., & Lui, R. (2010). Operator-Valued Measure, Dilation, and The Theory of Frames.
- [5] Paulsen, V. (2002). *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [6] Stinespring, W. F. (1954). Positive Function on C\*-Algebra, 211-216.