SIFAT-SIFAT FUNGSI KONVEKS YANG TIDAK DAPAT DIGENERALISASI MENJADI SIFAT-SIFAT FUNGSI KUASIKONVEKS

Vika Andina, Endang Cahya, Siti Fatimah
Departemen Pendidikan Matematika FPMIPA UPI
Correspondent autho: andinavika@gmail.com

ABSTRAK Fungsi konveks adalah fungsi yang dapat ditandai oleh *epigraph* yang konveks tetapi fungsi konveks tidak dapat ditandai oleh himpunan level bawah yang konveks. Fungsi kuasikonveks merupakan generalisasi dari fungsi konveks yang dapat ditandai oleh himpunan level bawah yang konveks. Kajian ini menghadirkan sifat-sifat fungsi konveks yang memiliki kemiripan dengan sifat-sifat fungsi kuasikonveks dan mengkaji sifat-sifat fungsi konveks yang tidak memiliki kemiripan dengan sifat-sifat fungsi kuasikonveks. Dengan kata lain, sifat-sifat tersebut berlaku untuk fungsi konveks tetapi tidak berlaku untuk fungsi kuasikonveks.
Kata kunci: fungsi konveks, *epigraph*, himpunan level bawah, fungsi kuasikonveks, sifat dengan kemiripan, sifat tanpa kemiripan

ABSTRACT Convex function is a function that can be characterized by convexity of its epigraph but can not be characterized by convexity of its lower level set. Quasiconvex function is a generalization of convex functions which can be characterized by convexity of its lower level set. This study presents the properties of convex functions with analogue for quasiconvex functions and observes the properties of convex functions with no analogue for quasiconvex functions. In other words, these properties valid for convex functions but does not valid for quasiconvex functions.
Keyword: convex function, *epigraph*, lower level set, quasiconvex function, analogue properties, no analogue properties

Pendahuluan

Fungsi konveks adalah salah satu konsep dalam matematika yang terus menerus mengalami perkembangan semenjak lahirnya penelitian karya Jensen pada tahun 1906 yang berjudul “Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes.” Banyak teorema yang melibatkan fungsi konveks muncul dalam penelitian-penelitian lainnya setelah kelahiran dari penelitian tersebut.

Fungsi konveks yang banyak diteliti didefinisikan pada sebuah himpunan konveks dari ruang Euclid berdimensi$-n$ atau disebut $\mathbb{R}^n$. Dalam beberapa literatur telah dijelaskan bahwa fungsi konveks dapat ditandai oleh *epigraph* yang konveks.

Kemudian muncul himpunan yang lebih besar dari sebuah *epigraph*, yaitu himpunan level bawah. Para peneliti menemukan bahwa jika himpunan level bawah dari sebuah fungsi adalah konveks, maka fungsi tersebut adalah konveks. Namun, ternyata pernyataan ini tidak berlaku sebaliknya. Hal ini telah mengantarkan kita untuk mengenal kelas fungsi yang lebih besar disebut kuasikonveks.

DeFinetti adalah salah satu orang pertama yang mengenali beberapa karakterisktik dari fungsi yang memiliki himpunan level bawah konveks pada tahun 1949. DeFinetti tidak menyebutkan nama kelas fungsinya, tetapi Ia mencatat bahwa kelas fungsi ini mencakup semua fungsi konveks dan beberapa fungsi tidak konveks. Fenchel adalah salah satu pelopor yang menyusun, menamai, dan mengembangkan kelas fungsi kuasikonveks pada tahun 1953.

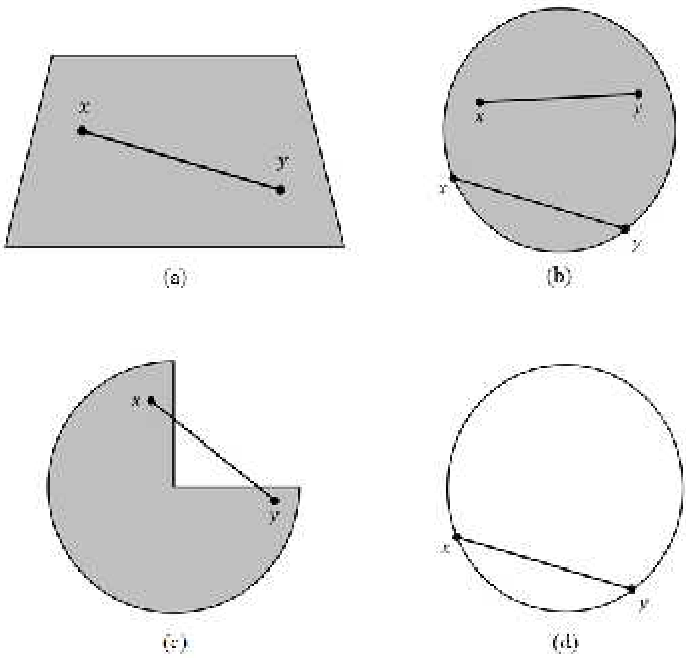
Pada tahun-tahun berikutnya, fungsi kuasikonveks terus mengalami perkembangan dan pada tahun 1970, Harvey J. Greenberg dan William P. Pierskalla menulis sebuah jurnal yang berjudul “A Review Of Quasi-Convex Functions”. Jurnal ini merangkum hasil dari banyak peneliti sebelumnya dan memberi perbaikan untuk mendapatkan kesimpulan umum yang lebih jauh. Tujuan tambahan dari jurnal ini adalah menyajikan kejelasan struktur yang mendasari fungsi kuasikonveks dengan menghadirkan sifat yang memiliki kemiripan dengan fungsi konveks dan dengan menggambarkan bahwa fungsi kuasikonveks juga memiliki sifat yang tidak memiliki kemiripan dengan fungsi konveks.

Jurnal tersebut merupakan salah satu jurnal yang sangat penting dalam perkembangan penelitian fungsi kuasikonveks hingga saat ini. Oleh karena itu penulis tertarik untuk membahas lebih lanjut mengenai sifat-sifat fungsi konveks yang tidak memiliki kemiripan dengan sifat-sifat fungsi kuasikonveks. Dengan kata lain, sifat-sifat dari fungsi konveks tersebut tidak dapat digeneralisasi menjadi sifat-sifat fungsi kuasikonveks. Maka dari itu disusunlah penelitian ini dengan judul **“SIFAT-SIFAT FUNGSI KONVEKS YANG TIDAK DAPAT DIGENERALISASI MENJADI SIFAT-SIFAT FUNGSI KUASIKONVEKS.”**

Pembahasan

1. Himpunan Konveks

Definisi 1.2 (Giaquinta dan Modica, 2012, hlm. 67)
Himpunan $S \subseteq \mathbb{R}^n$ dikatakan himpunan konveks jika segmen garis tutup di antara dua sebarang titik pada S terletak pada S, yaitu untuk sebarang $x, y \in S$ dan $\lambda \in [0,1]$, kita punya $\lambda \quad + (1 - \lambda)y \in S$.



Gambar 1.2 Contoh himpunan konveks (a) dan (b). Contoh himpunan tidak konveks (c) dan (d).

2. Fungsi Konveks

Definisi 2.1 (Greenberg dan Pierskalla, 1970, hlm. 1553)
Fungsi $f: S \to \mathbb{R}$ dikatakan konveks pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$ jika

$$f(\lambda \quad + (1-\lambda)y) \leq \lambda \quad (x) + (1-\lambda)f(y)$$

untuk semua $\lambda \in [0,1]$ dan $x, y \in S$.

3. Hubungan Fungsi Konveks dengan *Epigraph* dan Himpunan Level Bawah

Terkait dengan fungsi konveks, berikut ini akan disajikan definisi mengenai *epigraph* sebagai berikut.

Definisi 3.1 (Boyd, Vandenberghe, 2002, hlm. 61)
Epigraph dari fungsi $f: S \to \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ himpunan konveks, didefinisikan sebagai

$$e \quad f = \{(x,z) | f(x) \leq z\}$$

dengan $x \in S$ dan $z \in \mathbb{R}$.

Fungsi konveks dapat ditandai oleh *epigraph* yang konveks, seperti ditunjukkan oleh teorema berikut ini.

Teorema 3.1 (Cambini, Martein, 2009, hlm. 12)
Fungsi $f: S \to \mathbb{R}$ dikatakan konveks pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$ jika dan hanya jika e f himpunan konveks.

Selain *epigraph*, terkait dengan fungsi konveks juga didefinisikan himpunan level bawah sebagai berikut.

Definisi 3.2 (Giorgi, Guerraggio, dan Thierfelder, 2004, hlm. 118)
Himpunan level bawah dari fungsi $f: S \to \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ himpunan konveks, didefinisikan sebagai

$$L_\alpha = \{x | x \in S, f(x) \leq \alpha\},$$

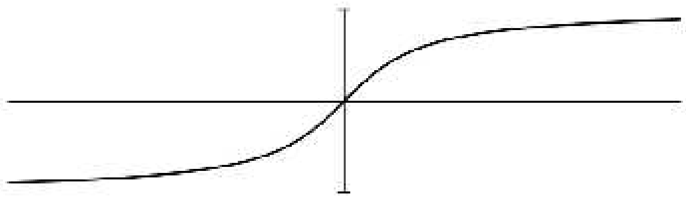
untuk sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sehubungan dengan himpunan level bawah dari fungsi konveks, diberikan teorema berikut ini.

Teorema 3.2 (Cambini, Martein, 2009, hlm. 12)
Jika $f: S \to \mathbb{R}$ adalah fungsi konveks pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$, maka L_α konveks untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.2 tidak berlaku sebaliknya karena terdapat contoh fungsi tidak konveks yang memiliki himpunan level bawah yang konveks.

Contoh 3.1
$f(x) = \tan^{-1} x = \arctan x$ bukan fungsi konveks (dapat dilihat dari grafik fungsinya),



Gambar 3.3 Grafik fungsi $f(x) = \tan^{-1} x = \arctan x$.

tetapi himpunan level bawahnya

$$L_\alpha = \begin{cases} \emptyset, & \alpha \leq -\frac{\pi}{2}, \\ (-\infty, \tan \alpha], & \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \mathbb{R}, & \alpha \geq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

semua konveks.

Jadi, fungsi konveks tidak dapat ditandai oleh himpunan level bawah yang konveks. Himpunan level bawah yang konveks menspesifikasikan kelas fungsi yang lebih luas, yaitu fungsi kuasikonveks.

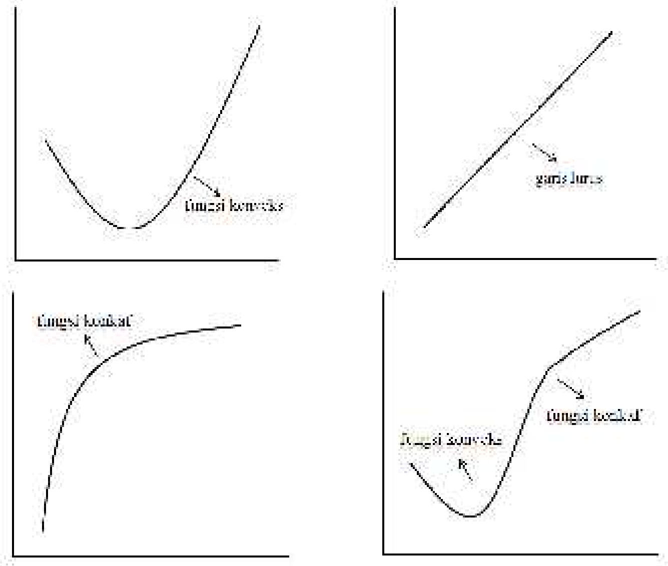
4. Fungsi Kuasikonveks

Definisi 4.1 (Cambini dan Martein, 2009, hlm. 24)
Misal $f: S \to \mathbb{R}$ dikatakan kuasikonveks pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$ jika

$$f(\lambda \quad + (1-\lambda)y) \le m \qquad \{f(x), f(y)\}$$

untuk setiap $x, y \in S$ dan $\lambda \in [0,1]$.

Dari dua definisi di atas, kita dapat menggambarkan macam-macam grafik fungsi kuasikonveks sebagai berikut.



Gambar 4.1 Berbagai macam bentuk grafik fungsi kuasikonveks.

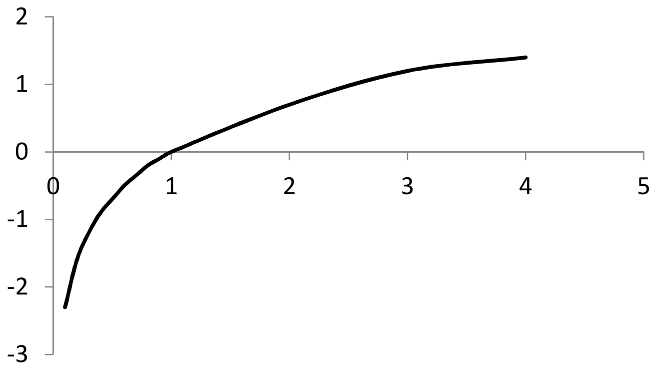
Jadi, fungsi kuasikonveks dapat berupa fungsi konveks, garis lurus, fungsi konkaf, atau pun gabungan dari fungsi konveks dan konkaf. Itu adalah keistimewaan dari fungsi kuasikonveks.

Berikut ini akan dijelaskan lebih lanjut mengenai hubungan fungsi kuasikonveks dengan fungsi konveks. Hubungan antara ke dua fungsi tersebut akan dijelaskan melalui teorema di bawah ini.

Teorema 4.1 (Cambini dan Martein, 2009, hlm. 25)
Jika fungsi $f: S \to \mathbb{R}$ konveks pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$, maka f kuasikonveks di S.

Teorema 4.1 tidak berlaku sebaliknya karena terdapat contoh fungsi kuasikonveks yang bukan merupakan fungsi konveks.

Contoh 4.1
$f(x) = \ln x$ dengan $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ adalah fungsi kuasikonveks, namun bukan fungsi konveks.



Gambar 4.2 Grafik fungsi $f(x) = \ln x$.

Dari gambar di atas terlihat jelas bahwa fungsi $f(x) = \ln x$ merupakan fungsi kuasikonveks namun bukan fungsi konveks.

5. Hubungan Fungsi Kuasikonveks dengan Himpunan Level Bawah

Pada bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa fungsi konveks dapat ditandai oleh *epigraph* yang konveks. Berikut ini akan dijelaskan bahwa fungsi kuasikonveks dapat ditandai oleh himpunan level bawah yang konveks. Seperti yang akan ditunjukkan oleh teorema berikut.

Teorema 5.1 (Cambini, Martein, 2009, hlm. 26)
Fungsi $f: S \to \mathbb{R}$ dikatakan kuasikonveks pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$ jika dan hanya jika himpunan level bawahnya, yaitu

$$L_\alpha = \{x | f(x) \leq \alpha\},$$

konveks untuk setiap $x \in S$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

Jadi, fungsi kuasikonveks dapat ditandai oleh himpunan level bawah yang konveks.

6. Sifat-Sifat Fungsi Konveks yang Dapat Digeneralisasi Menjadi Sifat-Sifat Fungsi Kuasikonveks

Selanjutnya akan dibahas beberapa sifat fungsi konveks yang dapat digeneralisasi menjadi sifat-sifat fungsi kuasikonveks dengan karakterisasi keterdiferensialan, nilai ekstrem, ketaksamaan, dan transformasi.

6.1 Keterdiferensialan Fungsi Kuasikonveks

Teorema 6.1.1 (Greenberg dan Pierskalla, 1970, hlm. 1560)
Misal f terdiferensialkan satu kali di $\mathbb{R}^n$. Maka f kuasikonveks di $\mathbb{R}^n$ jika dan hanya jika $f(y) \leq f(x)$ menunjukkan bahwa $\nabla f(x)^T(y - x) \leq 0$.

6.2 Nilai Ekstrem Fungsi Kuasikonveks

Teorema 6.2.1 (Greenberg dan Pierskalla, 1970, hlm. 1560)
Jika S adalah kompak maka $S \quad _{x \in S} f(x) = S \quad _{x \in E \quad (S)} f(x)$.

6.3 Ketaksamaan Fungsi Kuasikonveks

Teorema 6.3.1 (Greenberg dan Pierskalla, 1970, hlm. 1560)
$f(\lambda \quad) \leq f(x)$ untuk $\lambda \in [0,1]$ jika $f(x) \geq f(0)$.

6.4 Transformasi Fungsi Kuasikonveks

Teorema 6.4.1 (Greenberg dan Pierskalla, 1970, hlm. 1560)
$g(\alpha) = f[\alpha \quad + (1 - \alpha)y]$ kuasikonveks untuk sebarang $x, y \in S$ dan $\alpha \in [0,1]$, jika dan hanya jika f kuasikonveks.

Berdasarkan sifat-sifat fungsi kuasikonveks di atas serta berdasarkan sifat-sifat yang telah dikarakterisasi oleh Greenberg dan Pierskalla (1971), berikut ini akan disajikan tabel yang berisi sifat-sifat fungsi konveks yang dapat digeneralisasi menjadi sifat-sifat fungsi kuasikonveks. Tabel di bawah ini berlaku untuk $f: S \to \mathbb{R}$ terdefinisi pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

Tabel 6.1 Sifat-sifat fungsi konveks yang dapat digeneralisasi menjadi sifat-sifat fungsi kuasikonveks.

Konveks		**Kuasikonveks**	
1a.	f konveks jika dan hanya jika e f adalah himpunan konveks.	1b.	f kuasikonveks jika dan hanya jika L_α adalah himpunan konveks.
2a.	f linear jika dan hanya jika e f dan e $-f$ adalah himpunan konveks.	2b.	f kuasilinear jika dan hanya jika L_α dan $L_{-\alpha}$ adalah himpunan konveks untuk semua α.
3a.	f linear jika dan hanya jika $\{(x,z)\|x \in S, z \in \mathbb{R}, f(x) = z\}$ adalah himpunan konveks.	3b.	Misal $Y = \{x \in S: f(x) = \alpha\}$. Jika f kuasilinear, maka Y adalah himpunan konveks untuk semua α. Jika Y adalah himpunan konveks untuk semua α dan jika f kontinu, maka f kuasilinear.
4a.	L_α terbatas untuk semua α jika dan hanya jika terdapat α^* sedemikian sehingga L_{α^*} tidak kosong dan terbatas.	4b.	Jika L_α tidak kosong dan terbatas, maka terdapat $\alpha^* > \alpha$ sedemikian sehingga L_{α^*} terbatas.
5a.	f kontinu di r (S).	5b.	f kontinu hampir di semua r (S).
6a.	Turunan parsial satu sisi ada di seluruh r (S).	6b.	Turunan parsial satu sisi ada hampir di semua r (S).
7a.	Misalkan f terdiferensialkan dua kali di $\mathbb{R}^n$. Maka f konveks di $\mathbb{R}^n$ jika dan hanya jika *hessian* $H(\cdot)$ adalah positif setengah terbatas di sepanjang $\mathbb{R}^n$.	7b.	Misal f terdiferensialkan dua kali di $\mathbb{R}^n$. Jika f kuasikonveks di $\mathbb{R}_+{}^n$, maka $\|U_j\| \leq 0$ untuk $j = 1, \ldots, n$. Jika $\|U_j\| < 0$ untuk $j = 1, \ldots, n$, maka f kuasikonveks di $\mathbb{R}_+{}^n$.
8a.	Misalkan f terdiferensialkan satu kali di $\mathbb{R}^n$. Maka f konveks di $\mathbb{R}^n$ jika dan hanya jika $f(y) - f(x) \geq \square f(x)^T(y - x)$.	8b.	Misal f terdiferensialkan satu kali di $\mathbb{R}^n$. Maka f kuasikonveks di $\mathbb{R}^n$ jika dan hanya jika $f(y) \leq f(x)$ menunjukkan bahwa $\square f(x)^T(y - x) \leq 0$.

Konveks		Kuasikonveks	
9a.	$S \quad {}_{x \square E} \quad {}_{(S)} f(x) < +\infty$ jika x kompak.	9b.	$S \quad {}_{x \square E} \quad {}_{(S)} f(x) < +\infty$ jika x kompak.
10a.	Jika S adalah kompak maka $S \quad {}_{x \square S} f(x) =$ $S \quad {}_{x \square E} \quad {}_{(S)} f(x)$.	10b.	Jika S adalah kompak maka $S \quad {}_{x \square S} f(x) = S \quad {}_{x \square E} \quad {}_{(S)} f(x)$.
11a.	Setiap minimum lokal adalah minimum global.	11b.	Setiap minimum lokal adalah minimum global atau f konstan di lingkungan minimum lokal.
12a.	Himpunan minimum global adalah konveks.	12b.	Himpunan minimum global adalah konveks.
13a.	Kualifikasi batas Kuhn-Tucker terpenuhi untuk $\{x; f_i(x) \leq 0, i = 1,2, \dots, m\}$ jika terdapat $x: f_i(x) < 0$ untuk semua $i = 1,2, \dots, m$.	13b.	Kualifikasi batas Kuhn-Tucker terpenuhi untuk $\{x; f_i(x) \leq 0, i = 1,2, \dots, m\}$ jika $\square f_i(x) \neq 0$ untuk $i \square f_i(x) = 0, i = 1,2, \dots, m$.
14a.	Misal X, Y subset kompak di $\mathbb{R}^n$ dan $\mathbb{R}^m$, berturut-turut, dan misalkan $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^1 \square$ untuk setiap $y \square Y, f(x, \square)$ adalah konkaf dan untuk setiap $x \square X, f(x, \square)$ adalah konveks. Lebih jauh lagi, misal $f(x, y)$ kontinu. Maka $f(x, y)$ memiliki titik *saddle*, katakanlah $(x^{\square}, y^{\square}) \square X \times Y$.	14b.	Misal X, Y himpunan kompak di $\mathbb{R}^n$ dan $\mathbb{R}^m$, berturut-turut, dan misalkan $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^1 \square$ untuk setiap $y \square Y, f(x, \square)$ adalah kuasikonkaf dan *upper semi-continuous* serta untuk setiap $x \square X, f(\square, y)$ adalah kuasikonveks dan *lower semi-continuous*. Maka terdapat titik *saddle* dari $f(x, y)$, katakanlah $(x^{\square}, y^{\square}) \square X \times Y$.
15a.	$f(\lambda \quad) \leq \lambda \quad (x)$ untuk $\lambda \square [0,1]$ jika $f(0) \leq 0$.	15b.	$f(\lambda \quad) \leq \lambda \quad (x)$ untuk $\lambda \square [0,1]$ jika $f(x) \leq f(0)$.
16a.	$g(\lambda) = f(\lambda \quad)/\lambda$ adalah monoton naik untuk $\lambda > 0$ jika $F(0) = 0, \lambda \square \mathbb{R}^1$	16b.	$g(\lambda) = f(\lambda \quad)$ adalah monoton naik untuk $\lambda \geq 0$ jika $f(x) \geq f(0), \lambda \square \mathbb{R}^1$
17a.	$\boldsymbol{g(\alpha) = f[\alpha \quad + (1 - \alpha)y]}$ **konveks, dengan** $\boldsymbol{\alpha \square [0, 1]}$ **untuk sebarang** $\boldsymbol{x, y \square S \Leftrightarrow f}$	**17b.**	$\boldsymbol{g(\alpha) = f[\alpha \quad + (1 - \alpha)y]}$ **kuasikonveks, dengan** $\boldsymbol{\alpha \square [0, 1]}$ **untuk sebarang** $\boldsymbol{x, y \square S \Leftrightarrow f}$

	Konveks.		**kuasikonveks.**
18a.	$g(x) = s \quad {}_{\gamma\square\Gamma} f_\gamma(x)$ konveks, dimana Γ adalah sebarang himpunan indeks.	18b.	$g(x) = s \quad {}_{\gamma\square\Gamma} f_\gamma(x)$ kuasikonveks, dimana Γ adalah sebarang himpunan indeks
19a.	$g(x) = F[f(x)]$ konveks jika F konveks dan tidak turun.	19b.	$g(x) = F[f(x)]$ kuasikonveks jika F tidak turun.

Dari tabel 6.1 terlihat bahwa sebagai fungsi yang merupakan generalisasi dari fungsi konveks, fungsi kuasikonveks memiliki sifat-sifat yang memiliki kemiripan dengan sifat-sifat fungsi konveks. Namun, karena fungsi kuasikonveks merupakan generalisasi dari fungsi konveks, kita dapat menduga bahwa terdapat sifat-sifat fungsi konveks yang tidak memiliki kemiripan dengan fungsi kuasikonveks atau dengan kata lain, terdapat sifat-sifat fungsi konveks yang tidak dapat digeneralisasi menjadi sifat-sifat fungsi kuasikonveks. Sifat-sifat ini akan dibahas pada bab selanjutnya.

7. Sifat-Sifat Fungsi Konveks yang Tidak Dapat Digeneralisasi Menjadi Fungsi Kuasikonveks

Sifat-sifat yang dibahas di bawah ini mengacu pada karakterisasi yang dilakukan oleh Greenberg dan Pierskalla (1970) meliputi sifat aditif, konjugat, keterbatasan, dan teorema alternatif.

a. Aditif

Berikut ini akan dibahas salah satu sifat dari fungsi konveks yang melibatkan konsep aditif.

Teorema a.1 (Richter, 2011, hlm. 65)
Jika $f_1, \dots, f_n$ adalah fungsi konveks dengan $f_i: S \to \mathbb{R}$ pada himpunan konveks $S \square \mathbb{R}^n$. Maka untuk sebarang $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dengan $\alpha_i \geq 0$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$$

untuk setiap $x \square S$, juga merupakan fungsi konveks.

Contoh a.1
Diberikan fungsi $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kuasikonveks pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$ dengan $i = 1,2$ dan $x \in S$, dengan definisi sebagai berikut:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}; \qquad f_2(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Fungsi $f_1(x)$ dan $f_2(x)$ adalah kuasikonveks, tetapi

$$f_1(x) + f_2(x) = -x^2$$

bukan merupakan fungsi kuasikonveks.

b. Konjugat

Berikut ini akan dibahas salah satu sifat dari fungsi konveks yang melibatkan konsep konjugat. Sebelumnya akan disajikan definisi mengenai fungsi konjugat sebagai berikut.

Definisi b.1 Fungsi Konjugat (Tuy, 1998, hlm. 72)
Diberikan sebarang fungsi $f: \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$. Fungsi

$$f^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n}\{\langle p, x\rangle - f(x)\}$$

untuk setiap $p, x \in \mathbb{R}^n$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, yang secara jelas merupakan fungsi konveks dan tutup, disebut konjugat dari $f(x)$.

Selanjutnya akan dibahas teorema yang merupakan sifat konjugat dari konjugat fungsi konveks.

Teorema b.1 (Tuy, 1998, hlm. 84)
Misal $f: \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ adalah sebarang fungsi *proper*.
Maka:
(i) $f(x) + f^*(p) \geq \langle p, x\rangle$ untuk setiap $p, x \in \mathbb{R}^n$.
(ii) $f^{**}(x) \leq f(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$. $f^{**} = f$ jika dan hanya jika f adalah konveks dan tutup.

Dari teorema di atas, kita peroleh sifat konjugat dari konjugat fungsi konveks, yaitu $f^{**} = f$ untuk $f: \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ sebarang fungsi *proper*, dengan

$$f^{**}(x) = \sup_p\{\langle p, x\rangle - f^*(p)\}$$

dan

$$f^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n}\{\langle p, x\rangle - f(x)\}$$

untuk setiap $p, x \in \mathbb{R}^n$, jika dan hanya jika f fungsi konveks dan tutup.

Contoh b.1
Diberikan fungsi kuasikonveks $f(x) = \ln x$ dengan $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Pertama, akan dicari konjugat dari fungsi $f(x) = \ln x$.

$$f^{*}(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n}\{\langle p, x\rangle - f(x)\} \text{ untuk setiap } p, x \in \mathbb{R}^n.$$

$$f^{*}(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n}\{p \quad - \ln x\}$$

Fungsi $f^{*}(p)$ mencapai maksimum ketika

$$\partial_x(p \quad - \ln x) = 0$$

$$p - \frac{1}{x} = 0$$

$$p = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{1}{p}$$

Kemudian, subtitusikan nilai x ke dalam $f^{*}(p)$, sehingga diperoleh nilai $f^{*}(p)$ sebagai berikut:

$$f^{*}(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n}\{p \quad - \ln x\}$$

$$f^{*}(p) = p.\frac{1}{p} - \ln\frac{1}{p}$$

$$f^{*}(p) = 1 - \ln\frac{1}{p}$$

Selanjutnya, akan dicari konjugat kedua dari fungsi $f(x) = \ln x$.

$$f^{**}(x) = \sup_p\{\langle p, x\rangle - f^{*}(p)\}$$

$$f^{**}(x) = \sup_p\left\{p \quad - \left(1 - \ln\frac{1}{p}\right)\right\}$$

$$f^{**}(x) = \sup_p\left\{p \quad - 1 + \ln\frac{1}{p}\right\}$$

Fungsi $f^{**}(x)$ mencapai maksimum ketika

$$\partial_p\left(p \quad - 1 + \ln\frac{1}{p}\right) = 0$$

$$x + p = 0$$

$$x = -p$$

$$p = -x$$

Kemudian, subtitusikan nilai p ke dalam $f^{**}(x)$, sehingga diperoleh nilai $f^{**}(x)$ sebagai berikut:

$$f^{**}(x) = \sup_p\left\{p \quad - 1 + \ln\frac{1}{p}\right\}$$

$$f^{**}(x) = (-x).x - 1 + \ln\frac{1}{-x}$$

$$f^{**}(x) = -x^2 - 1 + \ln\frac{1}{-x}$$

Jadi, terbukti bahwa $f(x) \neq f^{**}(x)$.

c. Keterbatasan

Selanjutnya akan dibahas salah satu sifat dari fungsi konveks yang melibatkan konsep keterbatasan. Sebelum membahas sifat keterbatasan tersebut, akan dibahas terlebih dahulu definisi dan teorema yang mendukung pembuktian sifat keterbatasan fungsi konveks.

Definisi c.1 (Giorgi, Guerraggio, dan Thierfelder, 2004, hlm. 30)
Diberikan himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$, relatif interior dari S, dinotasikan dengan $ri(S)$, didefinisikan sebagai

$$ri(S) = \{x \in S \mid \exists \varepsilon > 0, N_\varepsilon(x) \cap aff(S) \subseteq S\},$$

$N_\varepsilon(x)$ adalah sebuah bola dengan radius ε dan berpusat di x.

Relatif interior dari S dapat dilihat sebagai sub himpunan dari *affine hull*. Oleh karena itu, definisi dari relatif interior tersebut berhubungan dengan topologi dari $aff(S)$.

Teorema c.1 (Giorgi, Guerraggio, dan Thierfelder, 2004, hlm. 90)
Misal $f: S \to \mathbb{R}$ adalah fungsi konveks pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$, maka f kontinu di $ri(S)$.

Selanjutnya akan dibahas teorema yang menyajikan sifat keterbatasan dari fungsi konveks sebagai berikut.

Teorema c.2 (Giorgi, Guerraggio, dan Thierfelder, 2004, hlm. 93)
Jika $f: S \to \mathbb{R}$ konveks pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$, maka:
(i) f terbatas di setiap $Y \subseteq ri(S)$,
(ii) f terbatas di bawah di setiap himpunan terbatas $Y \subseteq S$.

Dari teorema di atas, diketahui bahwa jika $f: S \to \mathbb{R}$ konveks pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$, maka

$$\inf_{x \in ri(S)} f(x) > -\infty$$

di setiap $ri(S) \subseteq S$ yang terbatas.

Sifat ini tidak berlaku untuk fungsi kuasikonveks, seperti yang ditunjukkan oleh contoh berikut ini.

Contoh c.1

$$f(x) = \begin{cases} 1/(x-1), & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

$f(x)$ adalah fungsi kuasikonveks. Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $f(x)$ terbatas di bawah di setiap himpunan terbatas Y □ r (S) □ S. Dengan kata lain, $i n_{x □ Y} f(x) > -\infty$ di Y □ r (S) □ S yang terbatas.
Pertama, kita periksa lebih dahulu kekontinuan dari $f(x)$. $f(x)$ dikatakan kontinu di relatif interior, $x = a$ □ Y □ r (S) □ S, jika $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Dengan kata lain, $f(x)$ dikatakan kontinu di titik $x = a$ jika nilai dari limit kanan, limit kiri, dan nilai fungsinya sama. (Dinesh, 2010, hlm. 31)
Karena

$$\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1),$$

maka $f(x)$ tidak kontinu di $x = 1$.
Karena $f(x)$ tidak kontinu di r (S), maka $f(x)$ tidak terbatas pada himpunan terbatas Y □ r (S) □ S. Oleh karena itu, $i n_{x □ Y} f(x) = -\infty$.

d. Teorema Alternatif

Terdapat sejumlah hasil dari beberapa penelitian mengenai sistem ketaksamaan fungsi konveks yang menghasilkan teorema alternatif untuk kasus nonlinear. Subbab ini akan mengkaji salah satu teorema alternatif yang diperoleh dari hasil penelitian Fan, Glicksberg, dan Hoffman (1957). Teorema alternatif ini merupakan salah satu aplikasi dari teorema *separating hyperplane*.

Teorema d.1 (Avriel, 2003, hlm. 80)
Jika $f_1, \ldots, f_m$ adalah fungsi konveks yang *proper* pada himpunan konveks S □ $\mathbb{R}^n$, maka satu dari dua pernyataan berikut benar:

(i) Terdapat x □ S sedemikian sehingga $f_i(x) < 0$ untuk semua $i = 1, \ldots, m$.

(ii) Terdapat konstanta $\alpha_i \geq 0$ dengan $i = 1, \ldots, m$ dan $\alpha_j \neq 0$ untuk suatu j □ $\{1, \ldots, m\}$, sedemikian sehingga

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) \geq 0$$

untuk semua x □ S.

Teorema di atas tidak berlaku secara umum jika $f_1, \ldots, f_m$ merupakan fungsi kuasikonveks. Lebih lanjut Greenberg (1971) menyatakan bahwa “Bukti dari teorema di atas tidak dapat digeneralisasi menjadi fungsi kuasikonveks. Tidak terdapat kesamaan yang jelas antara fungsi konveks dan fungsi kuasikonveks.”

8. Simpulan dan Saran

Simpulan

1. $f: S \to \mathbb{R}$ dikatakan kuasikonveks pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$ jika
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \max\{f(x), f(y)\}$$
untuk setiap $x, y \in S$ dan $\lambda \in [0,1]$. Pernyataan ini ekuivalen dengan, $f: S \to \mathbb{R}$ dikatakan kuasikonveks pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$ jika dan hanya jika himpunan level bawahnya, yaitu
$$L_\alpha = \{x \mid x \in S, f(x) \le \alpha\},$$
konveks untuk sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Sifat-sifat dari fungsi konveks, yaitu aditif, konjugat, keterbatasan, dan teorema alternatif secara umum tidak berlaku untuk fungsi kuasikonveks.

Saran

Penelitian ini membahas sifat-sifat dari fungsi konveks yang tidak dapat digeneralisasi menjadi fungsi kuasikonveks. Selanjutnya, dapat diteliti pula fungsi kuasikonveks semi-kuat, yaitu kelas dari generalisasi fungsi konveks yang berada di pertengahan fungsi konveks dan fungsi kuasikonveks. Lebih jauh lagi, dapat diteliti generalisasi fungsi konveks dari beberapa fungsi homogen, di mana fungsi kuasikonveks ditandai dengan beberapa kelas dari fungsi homogen yang sering muncul di dalam ilmu ekonomi.

REFERENSI

Anton, H., & Rorres, C. (2005). *Elementary Linear Algebra Ninth Edition.* U.S.A: John Willey & Sons Inc.

Avriel, Mordecai. (2003). *Nonlinear Programming: Analysis and Methods.* New Jersey: Courier Corporation.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. 2011. *Introduction to Real Analysis: Fourth Edition.* U.S.A: John Willey & Sons Inc.

Boyd, S., & Vandenberghe, Lieven. (2002). *Convex Optimization.* New York: Cambridge University Press.

Cambini, Alberto., & Martein, L. (2009). *Generalized Convexity and Optimizatin.* Berlin: Springer.

Dinesh, Khattar. (2010). *The Pearson Guide To Mathematics for The Lit-Jee, 3/E.* India: Pearson education India.

Ebbesen, A. M. (2012). *Convex Sets and Their Integral Representations.* Copenhagen: University of Copenhagen.

Fan, Ky., Glicksberg, Irving., & Hoffman, A. J. (1957). *System of Inequalities Involving Convex Functions.*

Giaquinta, M., & Modica, G. (2012). *Mathematical Analysis, Foundations and Advanced Techniques for Functions of Several Variables.* U.S.A: Springer Science+Business Media.

Giorgi, G., Guerraggio, A., Thierfelder, J. (2004). *Mathematics of Optimization: Smooth and Nonsmooth Case.* Amsterdam: Elsevier B. V.

Greenberg, H. J. (2003). *Mathematical Programming Glosary Supplement: Convex Cones, Sets, and Functions.* Colorado: University of Colorado.

Greenberg, H. J., & Pierskalla, W. P. (1971). *A Review of Quasi-convex Function*. U.S.A: John Willey & Sons Inc.

Kirkwood, J. R. (1995). *An Introduction to Analysis: Second Edition.* Boston: PWS Publishing Company.

Malik, S. C. 2008. *Principles of Real Analysis.* India: New Age International.

Osborne, M. J. (1997-2003). *Mathematical Methods for Economic Theory: A Tutorial.* Toronto: University of Toronto.

Roberts, A. W., & Varberg, D. E. (1973). *Convex Functions.* New York and London: Academic Press.

Tuy, Huang. (1998). *Convex Analysis and Global Optimization*. Netherlands: Kluwer Academic Publisher.