PRODUK SILANG ATAS SEMIGRUP ENDOMORFISMA

Ishma Fadlina Urfa, Rizky Rosjanuardi, Isnie Yusnitha

Departemen Pendidikan Matematika FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia

*Coresponding author: ishmafadlina@yahoo.com

ABSTRAK: Misal Γ grup abelian terurut total dan Γ^+ adalah bagian positifnya, B_{Γ^+} aljabar-C^*, dan $\alpha: \Gamma^+ \longrightarrow E \quad (B_{\Gamma^+})$ adalah aksi dari semigrup Γ^+ pada B_{Γ^+} melalui endomorfisma. Representasi isometrik V dari Γ^+ adalah homomorfisma dari semigrup Γ^+ ke semigrup isometri $I_s \quad (H)$ pada ruang Hilbert H. Adji, Laca, Nilsen, dan Raeburn (1994) telah membuktikan eksistensi representasi kovarian (π_V, V) dan bentuk produk silang yang dibangun oleh representasi isometrik $B_{\Gamma^+} \times_\alpha \Gamma^+$ dari sistem dinamik $(B_{\Gamma^+}, \Gamma^+, \alpha)$, serta hubungan $B_{\Gamma^+} \times_\alpha \Gamma^+$ dengan aljabar-C^* yang dibangun oleh unsur-unsur isometri non-uniter. Pada tugas akhir ini akan dilihat bagaimana konstruksi pembuktian hasil-hasil diatas.

Kata kunci: produk silang, aljabar-C^*, semigrup, endomorfisma, representasi isometrik.

ABSTRACT: Let Γ be totally ordered abelian group and Γ^+ be its positive cone, B_{Γ^+} a C^*-algebra, and

$$\alpha: \Gamma^+ \longrightarrow E \quad (B_{\Gamma^+})$$

an action of Γ^+ on B_{Γ^+} by endomorphisms. An isometric representation of Γ^+ is a homomorphism of the semigroup Γ^+ into the semigroup of isometries $I_s \quad (H)$ on a Hilbert space H. Adji, Laca, Nilsen and Raeburn (1994) prove the existence of covariant representation (π_V, V) and crossed product generated by isometric representation $B_{\Gamma^+} \times_\alpha \Gamma^+$ of dynamical system $(B_{\Gamma^+}, \Gamma^+, \alpha)$, and also the relation between $B_{\Gamma^+} \times_\alpha \Gamma^+$ and a C^*-algebra generated by nonunitary isometric representations. In this paper, we study how they construct the proof.

Key words: crossed product, C^*-algebra, semigroup, endomorphisms, isometric representation.

PENDAHULUAN

Misal G suatu grup abelian terurut total dengan G^+ adalah bagian positifnya dan A suatu aljabar-C^*. Sistem (A, G^+, α) dikatakan sebagai sistem dinamik jika terdapat homomorfisma α dari G^+ ke Endo(A). Sistem dinamik (A, G^+, α) mempunyai representasi kovarian, yaitu pasangan (π, V) dimana $\pi: A \longrightarrow B(H)$ adalah representasi *nondegenerate* dari A pada H (dalam kasus A unital, π adalah representasi unital), dan $V: G^+ \longrightarrow \text{Isom}(H)$ representasi isometrik dari G pada H yang memenuhi kondisi kovarian: $\pi(\alpha_x(a)) = V_x\pi(a)V_x^*$, $\forall x \in G, a \in A$. Selanjutnya dari representasi kovarian tersebut dapat dibentuk suatu representasi terbesar (kanonik) yang membangun aljabar-C^* , notasikan aljabar-C^* tersebut dengan $A \times_\alpha G^+$, yaitu produk silang dari (A, G^+, α). Jika representasi V dari semigrup G^+ merupakan representasi isometrik, maka singkatnya $A \times_\alpha G^+$ menjadi suatu aljabar-C^* yang dibangun oleh unsur isometri.

Coburn (1967) mengenalkan suatu aljabar-C^* yang dibangun oleh unsur isometri nonuniter untuk kasus grup $G = \mathbb{Z}$. Teori tersebut kemudian dikembangkan oleh Douglas pada tahun 1972 dengan semigrupnya adalah bagian positif dari $\mathbb{R}$. Murphy (1987) mengembangkan semigrup yang digunakan Douglas menjadi bagian positif dari suatu grup terurut abelian total. Ia mengenalkan kelas baru dari aljabar-C^* yang mempunyai sifat yang menarik. Untuk setiap grup terurut G, terdapat aljabar-C^* yang berasosiasi, yaitu aljabar Toeplitz $\mathcal{T}(G)$ dari grup terurut G. Aljabar Toeplitz $\mathcal{T}(G)$ tersebut memiliki sifat universal terhadap semigrup isometri dari G^+. Adji, Laca, Nielsen dan Raeburn dalam papernya *Crossed Products by Semigroups of Endomorphisms and The Toeplitz Algebras of Ordered Groups* (1994) membuktikan bahwa aljabar Toeplitz $\mathcal{T}(G)$ yang dikaji oleh Murphy adalah isomorfik dengan aljabar-C^* yang dibangun oleh isometri yaitu produk silang $B_{\Gamma^+} \times_\alpha \Gamma^+$ atas semigrup endomorfisma sebagai akibat dari teorema utamanya.

1. Produk Silang Atas Semigrup Endomorfisma

Definisi 2.1. Misal Γ grup abelian diskrit terurut total dengan bagian positif Γ^+. Representasi isometrik V dari Γ^+ adalah homomorfisma dari semigrup Γ^+ ke semigrup isometri $\mathrm{Isom}(H) := \{T \in B(H) : T \text{ isometri}\}$ pada ruang Hilbert H, dengan kata lain $\|V(x)\| = \|x\|, \forall x \in \Gamma^+$, atau ekivalen dengan $V^*V = I$.

Definisi 2.2.[1] Misal Γ grup abelian diskrit terurut total dengan bagian positif Γ^+, A aljabar-C^* unital dan α aksi dari Γ^+ ke E (A). Representasi kovarian dari sistem dinamik (A, Γ^+, α) adalah pasangan (π, V) dimana $\pi: A \longrightarrow B(H)$ adalah representasi unital dari A pada H, dan $V: \Gamma^+ \longrightarrow I$ (H) adalah representasi isometrik dari Γ^+ pada H sedemikian sehingga memenuhi kondisi kovarian:

$$\pi(\alpha_x(a)) = V_x\pi(a)V_x^*, \forall a \in A, x \in \Gamma^+.$$

Produk silang dari sistem dinamik (A, Γ^+, α) adalah aljabar-C^* unital B bersama dengan homomorfisma unital $i_A: A \longrightarrow B$ dan homomorfisma i_{Γ^+} dari Γ^+ ke semigrup isometri di B yang memenuhi:

1. $i_A(\alpha_x(a)) = i_{\Gamma^+}(x) i_A(a) i_{\Gamma^+}(x)^*, \forall a \in A, x \in \Gamma^+.$

2. Untuk setiap representasi kovarian (π, V) dari (A, Γ^+, α), terdapat representasi unital $\pi \times V$ dari B dengan $(\pi \times V) \circ i_A = \pi$ dan $(\pi \times V) \circ i_{\Gamma^+} = V$; dan
3. B dibangun oleh $\{i_A(a): a \in A\}$ dan $\{i_{\Gamma^+}(x): x \in \Gamma^+\}$.

Catatan 2.3.[1]

i. B direntang oleh $\{i_{\Gamma^+}(x)^* i_A(a) i_{\Gamma^+}(y): a \in A, x, y \in \Gamma^+\}$ berdasarkan Lemma 1.1[2]
ii. Sistem dinamik (A, Γ^+, α) mempunyai tepat sebuah produk silang berdasarkan Proposisi 3[3], notasikan dengan $(A \times_\alpha \Gamma^+, i_A, i_{\Gamma^+})$.
iii. Jika terdapat representasi kovarian (π, V) dengan π faithful, kondisi 2 mengakibatkan i_A injektif.

Teorema 2.4.[1]

Misal (π, V) representasi kovarian dari (A, Γ^+, α) sedemikian sehingga

i. π faithful, dan
ii. Untuk setiap subset berhingga F dari Γ^+ dan semua pilihan $a_{x,y} \in A$,

$$\left\| \sum_{x \in F} V_x^* \pi(a_{x,x}) V_x \right\| \leq \left\| \sum_{x,y \in F} V_x^* \pi(a_{x,y}) V_y \right\|.$$

Maka $\pi \times V$ representasi faithful dari $A \times_\alpha \Gamma^+$.

3. Konstruksi Sistem Dinamik $(B_{\Gamma^+}, \Gamma^+, \alpha)$

Konstruksi sistem dinamik $(B_{\Gamma^+}, \Gamma^+, \alpha)$ mencakup konstruksi aljabar-C^* B_{Γ^+} dan aksi α yang menghubungkan semigrup Γ^+ dengan aljabar-C^* B_{Γ^+}.

Misal Γ grup abelian terurut total dan $\Gamma^+ = \{x \in \Gamma; x \geq 0\}$ bagian positif dari Γ. Untuk setiap $x \in \Gamma^+$, definisikan 1_x fungsi karakteristik dari $\{y \in \Gamma^+, \ y \geq x\}$, yaitu

$$1_x(y) = \begin{cases} 1, \text{jika } & y \geq x \\ 0, \text{lainnya} & \end{cases}.$$

Definisikan $B_{\Gamma^+} := \overline{\text{span}}\{1_x : x \in \Gamma^+\}$ subruang tutup dari aljabar-C^* $l^\infty(\Gamma)$. Sekarang akan ditunjukkan B_{Γ^+} subaljabar-C^* dari $l^\infty(\Gamma^+)$. Ambil sembarang $1_x, 1_y \in B_{\Gamma^+}$. Karena operasi perkalian pada $l^\infty(\Gamma)$ adalah perkalian titik demi titik, maka diperoleh $(1_x 1_y)(z) = 1_x(z) 1_y(z) = 1_{\max\{x,y\}}(z), \ \forall z \in \Gamma^+$, akibatnya B_{Γ^+} subaljabar-C^* dari $l^\infty(\Gamma^+)$. Jadi B_{Γ^+} adalah aljabar-C^* komutatif unital dengan operasi perkalian dan penjumlahan titik demi titik, norm supremum dan involusi konjugasi bilangan kompleks.

Untuk setiap $x \in \Gamma^+$, definisikan

$$\tau: \Gamma^+ \longrightarrow \mathrm{Aut}(l^\infty(\Gamma))$$
$$x \longmapsto \tau_x$$

dimana
$$\tau_x : l^\infty(\Gamma) \longrightarrow l^\infty(\Gamma)$$
$$f(y) \mapsto f(y-x).$$
Akan ditunjukkan B_{Γ^+} invarian untuk setiap τ_x, $x \in \Gamma^+$. Ambil sembarang $1_y \in B_{\Gamma^+}$. Perhatikan
$$\begin{aligned}\tau_x(1_y)(t) &= 1_y(t-x)\\ &= \begin{cases}1, & \text{jika } t-x \geq y\\ 0, & \text{lainnya}\end{cases}\\ &= \begin{cases}1, & \text{jika } t \geq x+y\\ 0, & \text{lainnya}\end{cases}\\ &= 1_{x+y}(t), \forall t \in \Gamma.\end{aligned}$$
Jadi B_{Γ^+} invarian untuk setiap τ_x. Oleh karena itu τ_x dapat direstriksi ke B_{Γ^+}; definisikan restriksi tersebut sebagai aksi $\alpha : \Gamma^+ \longrightarrow End(B_{\Gamma^+})$.

4. Produk Silang $B_{\Gamma^+} \times_\alpha \Gamma^+$

Lemma 4.1.[2] *Misal P_i keluarga proyeksi berhingga sedemikian sehingga $P_1 \geq P_2 \geq \cdots \geq P_N$. Maka untuk sembarang $\lambda_i \in \mathbb{C}$,*
$$\left\|\sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_i\right\| \leq \max_{1\leq n\leq N}\left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right|;$$
dan menjadi suatu kesamaan jika $P_i \neq P_{i+1}$, $\forall i$.

Proposisi 4.2.[2] *Misal Γ grup abelian terurut total dan misal $B_{\Gamma^+} \times_\alpha \Gamma^+$ produk silang dari sitem dinamik $(B_{\Gamma^+}, \Gamma^+, \alpha)$.*

i. *Jika ρ adalah representasi non-degenerate dari $B_{\Gamma^+} \times_\alpha \Gamma^+$, maka $\rho \circ i_{\Gamma^+}$ adalah representasi isometrik dari Γ^+.*

ii. *Untuk setiap $V : \Gamma^+ \longrightarrow Isom(H)$ representasi isometrik dari Γ^+, terdapat representasi π_V dari B_{Γ^+} sedemikian sehingga (π_V, V) adalah representasi kovarian dari $(B_{\Gamma^+}, \Gamma^+, \alpha)$. Jika setiap V_x adalah nonuniter, maka π_V faithful.*

iii. *$B_{\Gamma^+} \times_\alpha \Gamma^+$ dibangun oleh $\{i_{\Gamma^+}(x) : x \in \Gamma^+\}$. Faktanya,*
$$B_{\Gamma^+} \times_\alpha \Gamma^+ \coloneqq \overline{span}\{i_{\Gamma^+}(x)i_{\Gamma^+}(y)^* : x, y \in \Gamma^+\}.$$

iv. *$i_{B_{\Gamma^+}} : B_{\Gamma^+} \longrightarrow B_{\Gamma^+} \times_\alpha \Gamma^+$ injektif.*

Bukti.

i. Misal ρ adalah representasi *non-degenerate* dari $B_{\Gamma^+} \times_\alpha \Gamma^+$, artinya $\rho(1) = 1$. Ambil sembarang $x \in \Gamma^+$. Perhatikan
$$\begin{aligned}\left(\rho \circ i_{\Gamma^+}(x)\right)^*\left(\rho \circ i_{\Gamma^+}(x)\right) &= \left(\rho \circ i_{\Gamma^+}(x)^*\right)\left(\rho \circ i_{\Gamma^+}(x)\right)\\ &= \rho\left(i_{\Gamma^+}(x)^* i_{\Gamma^+}(x)\right)\\ &= \rho(1)\\ &= 1\end{aligned}$$

Jadi $\rho \circ \iota_{\Gamma^+}$ representasi isometrik dari Γ^+.

ii. Misal $V: \Gamma^+ \longrightarrow \mathrm{Isom}(H)$ adalah representasi isometrik dari Γ^+. Akan dicari suatu representasi π_V dari B_{Γ^+} sedemikian sehingga (π_V, V) adalah representasi kovarian dari$(B_{\Gamma^+}, \Gamma^+, \alpha)$.

Akan ditunjukkan π_V pemetaan linier *well-defined* pada $\mathrm{span}\{1_x : x \in \Gamma^+\}$. Perhatikan bahwa untuk sembarang subset berhingga F dari Γ^+,

$$\begin{aligned}\pi_V\left(\sum_{x \in F} \lambda_x 1_x\right) &= \left(\sum_{x \in F} \lambda_x \pi_V(\alpha_x(1_0))\right)\\ &= \left(\sum_{x \in F} \lambda_x V_x \pi_V(1_0) V_x^*\right)\\ &= \sum_{x \in F} \lambda_x V_x V_x^*.\end{aligned}$$

Jadi π_V pemetaan linier *well-defined* pada $\mathrm{span}\{1_x : x \in \Gamma^+\}$.

Kemudian akan ditunjukkan π_V dapat diperluas pada $B_{\Gamma^+} := \overline{\mathrm{span}}\{1_x : x \in \Gamma^+\}$ dengan menunjukkan bahwa

$$\left\| \sum_{x \in F} \lambda_x V_x V_x^* \right\| \leq \left\| \sum_{x \in F} \lambda_x 1_x \right\|.$$

Diberikan kombinasi linier berhingga $\sum_{x \in F} \lambda_x 1_x$ dengan F sembarang subset berhingga dari Γ^+. Karena Γ terurut total, F dapat diberi indeks sedemikian sehingga $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$. Maka $\sum_{x \in F} \lambda_x 1_x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{x_i} 1_{x_i}$ adalah kombinasi linier dari proyeksi-proyeksi 1_{x_i} sedemikian sehingga $1_{x_1} > 1_{x_2} > \cdots > 1_{x_N}$. Kemudian berdasarkan Lemma 4.1, diperoleh

$$\left\| \sum_{x \in F} \lambda_x 1_x \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{N} \lambda_{x_i} 1_{x_i} \right\| = \max_{1 \leq n \leq N} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_{x_i} \right|.$$

Misal $x, y \in \Gamma^+$ dengan $y > x$. Perhatikan

$$V_x V_x^* - V_y V_y^* = V_x V_x^* - V_x V_{y-x} V_{y-x}^* V_x^* = V_x\left(1 - V_{y-x} V_{y-x}^*\right) V_x^*.$$

Karena 1 dan $V_{y-x} V_{y-x}^*$ merupakan proyeksi dengan $\left(V_{y-x} V_{y-x}^*\right)\mathcal{H} \subseteq 1\mathcal{H}$ untuk suatu ruang Hilbert $\mathcal{H}$, maka $1 - V_{y-x} V_{y-x}^*$ merupakan proyeksi dan $1 - V_{y-x} V_{y-x}^* \geq 0$. Oleh karena itu $V_x V_x^* - V_y V_y^* \geq 0 \Leftrightarrow V_x V_x^* \geq V_y V_y^*$. Jadi $\sum_{x \in F} \lambda_x V_x V_x^*$ adalah kombinasi linier dari proyeksi-proyeksi $V_{x_i} V_{x_i}^*$ sedemikian sehingga $V_{x_1} V_{x_1}^* \geq V_{x_2} V_{x_2}^* \geq \cdots \geq V_{x_N} V_{x_N}^*$. Berdasarkan Lemma 4.1, diperoleh

$$\left\| \sum_{x \in F} \lambda_x V_x V_x^* \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{N} \lambda_{x_i} V_{x_i} V_{x_i}^* \right\| \leq \max_{1 \leq n \leq N} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_{x_i} \right| = \left\| \sum_{x \in F} \lambda_x 1_x \right\|.$$

Jadi π_V pemetaan linier well-defined pada $B_{\Gamma^+} := \overline{\mathrm{span}}\{1_x : x \in \Gamma^+\}$.

Karena $1_x 1_y = 1_{\max\{x,y\}}$ dan $V_x V_x^* V_y V_y^* = V_{\max\{x,y\}} V_{\max\{x,y\}}^*$, maka π_V adalah suatu homomorfisma-*. Karena $\alpha_x(1_y) = 1_{x+y}$, diperoleh

$$\begin{aligned}\pi_V\left(\alpha_x(1_y)\right) &= \pi_V(1_{x+y})\\ &= V_{x+y} V_{x+y}^*\\ &= V_x V_y (V_x V_y)^*\\ &= V_x\left(V_y V_y^*\right) V_x^*\end{aligned}$$

$$= V_x \pi_V(1_y) V_x^*$$

Jadi (π_V, V) representasi kovarian pada s $\{1_x : x \in \Gamma^+\}$. Karena π_V terbatas, maka π_V kontinu, dan oleh karena itu, (π_V, V) representasi kovarian pada B_{Γ^+}.

Asumsikan V representasi nonuniter. Misal $x, y \in \Gamma^+$ dengan $y > x$. Maka $V_{y-x} V_{y-x}^* \neq 0$, dan $1 - V_{y-x} V_{y-x}^*$ proyeksi tak nol. Oleh karena itu

$$V_x V_x^* - V_y V_y^* = V_x V_x^* - V_x V_{y-x} V_{y-x}^* V_x^* = V_x\left(1 - V_{y-x} V_{y-x}^*\right) V_x^* > 0.$$

Dengan kata lain $V_x V_x^* > V_y V_y^*$. Berdasarkan Lemma 4.1, diperoleh

$$\left\|\sum_{x \in F} \lambda_x V_x V_x^*\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{N} \lambda_{x_i} V_{x_i} V_{x_i}^*\right\| = \max_{1 \leq n \leq N} \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_{x_i}\right| = \left\|\sum_{x \in F} \lambda_x 1_x\right\|.$$

Jadi π_V isometrik dan oleh karena itu faithful pada B_{Γ^+}.

iii. Berdasarkan Catatan 2.3. (i), $i_{\Gamma^+}(x)^* i_{B_{\Gamma^+}}(1_y) i_{\Gamma^+}(z)$ merentang suatu subruang tutup dari $B_{\Gamma^+} \times_\alpha \Gamma^+$. Perhatikan

$$\begin{aligned} i_{\Gamma^+}(x)^* i_{B_{\Gamma^+}}\left(1_y\right) i_{\Gamma^+}(z) &= i_{\Gamma^+}(x)^* i_{B_{\Gamma^+}}\left(\alpha_y(1_0)\right) i_{\Gamma^+}(z) \\ &= i_{\Gamma^+}(x)^* i_{\Gamma^+}(y) i_{B_{\Gamma^+}}(1_0) i_{\Gamma^+}(y)^* i_{\Gamma^+}(z) \\ &= i_{\Gamma^+}(x)^* i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(y)^* i_{\Gamma^+}(z). \end{aligned}$$

Akan diperlihatkan bahwa untuk sembarang $x, y, z \in \Gamma^+$, berlaku

$$(2.3) \qquad i_{\Gamma^+}(x)^* i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(y)^* i_{\Gamma^+}(z) = i_{\Gamma^+}(a) i_{\Gamma^+}(b)^*$$

untuk suatu $a, b \in \Gamma^+$. Untuk itu akan ditinjau beberapa kasus.

Kasus 1: Untuk $z \leq y \leq x$, perhatikan

$$\begin{aligned} & i_{\Gamma^+}(x)^* i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(y)^* i_{\Gamma^+}(z) \\ &= \left(i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(x-y)\right)^* i_{\Gamma^+}(y) \left(i_{\Gamma^+}(z) i_{\Gamma^+}(y-z)\right)^* i_{\Gamma^+}(z) \\ &= \left(i_{\Gamma^+}(x-y)\right)^* \left(i_{\Gamma^+}(y)\right)^* i_{\Gamma^+}(y) \left(i_{\Gamma^+}(y-z)\right)^* \left(i_{\Gamma^+}(z)\right)^* i_{\Gamma^+}(z) \\ &= \left(i_{\Gamma^+}(x-y)\right)^* \left(i_{\Gamma^+}(y-z)\right)^* \\ &= \left(i_{\Gamma^+}(x-z)\right)^*. \end{aligned}$$

Pilih $a = 0$ dan $b = x - z$, maka

$$i_{\Gamma^+}(x)^* i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(y)^* i_{\Gamma^+}(z) = i_{\Gamma^+}(a) i_{\Gamma^+}(b)^*.$$

Kasus 2: Untuk $z \leq x \leq y$, perhatikan

$$\begin{aligned} & i_{\Gamma^+}(x)^* i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(y)^* i_{\Gamma^+}(z) \\ &= i_{\Gamma^+}(x)^* \left(i_{\Gamma^+}(x) i_{\Gamma^+}(y-x)\right) \left(i_{\Gamma^+}(z) i_{\Gamma^+}(y-z)\right)^* i_{\Gamma^+}(z) \\ &= i_{\Gamma^+}(x)^* i_{\Gamma^+}(x) i_{\Gamma^+}(y-x) \left(i_{\Gamma^+}(y-z)\right)^* \left(i_{\Gamma^+}(z)\right)^* i_{\Gamma^+}(z) \\ &= i_{\Gamma^+}(y-x) \left(i_{\Gamma^+}(y-z)\right)^*. \end{aligned}$$

Pilih $a = y - x$ dan $b = y - z$, maka

$$i_{\Gamma^+}(x)^* i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(y)^* i_{\Gamma^+}(z) = i_{\Gamma^+}(a) i_{\Gamma^+}(b)^*.$$

Kasus 3: Untuk $y \leq x \leq z$, perhatikan

$$\begin{aligned} & i_{\Gamma^+}(x)^* i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(y)^* i_{\Gamma^+}(z) \\ &= (i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(x-y))^* i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(y)^* (i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(z-y)) \end{aligned}$$

$= (i_{\Gamma^+}(x-y))^*(i_{\Gamma^+}(y))^* i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(y)^* i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(z-y)$
$= i_{\Gamma^+}(z-y)(i_{\Gamma^+}(x-y))^*$.
Pilih $a = z - y$ dan $b = x - y$, maka

$$i_{\Gamma^+}(x)^* i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(y)^* i_{\Gamma^+}(z) = i_{\Gamma^+}(a) i_{\Gamma^+}(b)^*.$$

Kasus 4: Untuk $y \le z \le x$, perhatikan
$i_{\Gamma^+}(x)^* i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(y)^* i_{\Gamma^+}(z)$
$= (i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(x-y))^* i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(y)^* (i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(z-y))$
$= (i_{\Gamma^+}(x-y))^*(i_{\Gamma^+}(y))^* i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(y)^* i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(z-y)$
$= i_{\Gamma^+}(z-y)(i_{\Gamma^+}(x-y))^*$.
Pilih $a = z - y$ dan $b = x - y$, maka

$$i_{\Gamma^+}(x)^* i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(y)^* i_{\Gamma^+}(z) = i_{\Gamma^+}(a) i_{\Gamma^+}(b)^*.$$

Kasus 5: Untuk $x \le y \le z$, perhatikan
$i_{\Gamma^+}(x)^* i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(y)^* i_{\Gamma^+}(z)$
$= i_{\Gamma^+}(x)^* \big(i_{\Gamma^+}(x) i_{\Gamma^+}(y-x)\big) i_{\Gamma^+}(y)^* \big(i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(z-y)\big)$
$= i_{\Gamma^+}(y-x) i_{\Gamma^+}(z-y)$
$= i_{\Gamma^+}(z-x)$.
Pilih $a = z - x$ dan $b = 0$, maka

$$i_{\Gamma^+}(x)^* i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(y)^* i_{\Gamma^+}(z) = i_{\Gamma^+}(a) i_{\Gamma^+}(b)^*.$$

Kasus 6: Untuk $x \le z \le y$, perhatikan
$i_{\Gamma^+}(x)^* i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(y)^* i_{\Gamma^+}(z)$
$= i_{\Gamma^+}(x)^* \big(i_{\Gamma^+}(x) i_{\Gamma^+}(y-x)\big)\big(i_{\Gamma^+}(z) i_{\Gamma^+}(y-z)\big)^* i_{\Gamma^+}(z)$
$= i_{\Gamma^+}(x)^* i_{\Gamma^+}(x) i_{\Gamma^+}(y-x)\big(i_{\Gamma^+}(y-z)\big)^*\big(i_{\Gamma^+}(z)\big)^* i_{\Gamma^+}(z)$
$= i_{\Gamma^+}(y-x)\big(i_{\Gamma^+}(y-z)\big)^*$.
Pilih $a = y - x$ dan $b = y - z$, maka

$$i_{\Gamma^+}(x)^* i_{\Gamma^+}(y) i_{\Gamma^+}(y)^* i_{\Gamma^+}(z) = i_{\Gamma^+}(a) i_{\Gamma^+}(b)^*.$$

Dari keenam kasus diatas, dapat disimpulkan bahwa $B_{\Gamma^+} \times_\alpha \Gamma^+$ dibangun oleh $\{i_{\Gamma^+}(x) : x \in \Gamma^+\}$, atau lebih tepatnya,

$$B_{\Gamma^+} \times_\alpha \Gamma^+ \coloneqq \overline{\operatorname{span}}\{i_{\Gamma^+}(x) i_{\Gamma^+}(y)^* : x, y \in \Gamma^+\}.$$

iv. Berdasarkan Catatan 2.3 (ii), $i_{B_{\Gamma^+}} : B_{\Gamma^+} \longrightarrow B_{\Gamma^+} \times_\alpha \Gamma^+$ injektif apabila terdapat representasi kovarian (π_V, V) dimana π_V faithful. Oleh karena itu perlu dibentuk suatu representasi V dari Γ^+ sedemikian sehingga π_V faithful. Berdasarkan Proposisi 4.2. (ii), cukup dibentuk suatu representasi V yang memuat isometri-isometri nonuniter. Pilih semigrup

$$T : \Gamma^+ \longrightarrow B(l^2(\Gamma^+))$$
$$x \mapsto T_x$$

dimana

$$T_x : l^2(\Gamma^+) \longrightarrow l^2(\Gamma^+)$$

$$\delta_y \longmapsto \delta_{x+y}.$$

Teorema 4.3.[1] *Misal Γ grup abelian terurut total dan $V: \Gamma^+ \longrightarrow B(H)$ suatu representasi isometrik dari Γ^+. Maka representasi $\pi_V \times V$ pada Proposisi 4.2. (ii) adalah isomorfisma dari $C^*(\Gamma^+) = B_{\Gamma^+} \times_\alpha \Gamma^+$ ke $C^*(V_x: x \in \Gamma^+)$ jika dan hanya jika V non-uniter.*

Bukti.

Akan ditunjukkan range dari $\pi_V \times V$ tepatnya adalah $C^*(V_x: x \in \Gamma^+)$. Berdasarkan Proposisi 4.2. (iii), $B_{\Gamma^+} \times_\alpha \Gamma^+$ dibangun oleh $\{i_{\Gamma^+}(x): x \in \Gamma^+\}$. Kemudian karena (π_V, V) representasi kovarian dari $(B_{\Gamma^+}, \Gamma^+, \alpha)$, maka $(\pi_V \times V)\big(i_{\Gamma^+}(x)\big) = V_x$. Jadi range dari $\pi_V \times V$ adalah $C^*(V_x: x \in \Gamma^+)$.

$(\Longrightarrow)$ Akan ditunjukkan jika V uniter, maka $\pi_V \times V$ bukan suatu isomorfisma. Asumsikan V_z uniter untuk $z \in \Gamma^+$ dan z tak nol. Ambil $(1 - 1_z) \in B_{\Gamma^+}$. Perhatikan

$$(\pi_V \times V)\left(i_{B_{\Gamma^+}}(1 - 1_z)\right) = \pi_V(1 - 1_z) = \pi_V(1) - \pi_V(1_z) = 1 - V_z V_z^* = 0.$$

Karena $i_{B_{\Gamma^+}}$ injektif berdasarkan Proposisi 4.2. (iv) dan $1 - 1_z \neq 0$, maka $\pi_V \times V$ tidak injektif. Jadi, $\pi_V \times V$ bukan suatu isomorfisma.

$(\Longleftarrow)$ Asumsikan V nonuniter. Maka berdasarkan Proposisi 4.2. (ii), π_V faithful, dan berdasarkan Teorema 2.4, $\pi_V \times V$ faithful jika kondisi

$$\left\|\sum_{x \in H} V_x^* \pi_V(f_{x,x}) V_x\right\| \leq \left\|\sum_{x,y \in H} V_x^* \pi_V(f_{x,y}) V_y\right\|$$

terpenuhi untuk semua subset berhingga H dari Γ^+ dan semua $f_{x,y} \in B_{\Gamma^+}$. Karena span$\{1_y: y \in \Gamma^+\}$ padat di B_{Γ^+}, maka cukup ditunjukkan

$$\left\|\sum \mu_{x,y,x} V_x^* V_y V_y^* V_x\right\| \leq \left\|\sum \mu_{x,y,z} V_x^* V_y V_y^* V_z\right\|$$

untuk semua $\mu_{x,y,z} \in \mathbb{C}$. Dari persamaan (2.3), untuk setiap pilihan $x, y, z \in \Gamma^+$, terdapat $a, b \in \Gamma^+$ sedemikian sehingga

$$V_x^* V_y V_y^* V_z = V_a V_b^*.$$

Karena setiap V_x adalah non-uniter, maka jika $x = z$ diperoleh

$$V_x^* V_y V_y^* V_x = (V_x^* V_y)(V_x^* V_y)^* = V_a V_a^*.$$

Jadi $a = b$. Akibatnya untuk semua subset berhingga F dari Γ^+ dan $\lambda_{x,y} \in \mathbb{C}$ cukup ditunjukkan

$$\left\|\sum_{x \in F} \lambda_{x,x} V_x V_x^*\right\| \leq \left\|\sum_{x,y \in F} \lambda_{x,y} V_x V_y^*\right\|.$$

Akan digunakan ide pembuktian Proposisi 1.7 pada paper *Simple C^*-Algebras Generated by Isometries* oleh Joachim Cuntz. Diberikan $\sum_{x,y \in F} \lambda_{x,y} V_x V_y^*$, akan dikonstruksi suatu proyeksi Q sedemikian sehingga

(2.4) $\quad QV_x V_y^* Q = 0 \quad$ untuk $x, y \in F$ dengan $x \neq y$,

dan

(2.5) $\quad \left\|Q\left(\sum_{x \in F} \lambda_{x,x} V_x V_x^*\right)Q\right\| = \left\|\sum_{x \in F} \lambda_{x,x} V_x V_x^*\right\|,$

sehingga

$$\left\|\sum_{x,y\in F}\lambda_{x,y}V_xV_y^*\right\| \geq \left\|Q\left(\sum_{x,y\in F}\lambda_{x,y}V_xV_y^*\right)Q\right\|$$

$$= \left\|Q\left(\left(\sum_{\substack{x,y\in F\\ x\neq y}}\lambda_{x,y}V_xV_y^*\right)+\left(\sum_{x\in F}\lambda_{x,x}V_xV_x^*\right)\right)Q\right\|$$

$$= \left\|Q\left(\sum_{x\in F}\lambda_{x,x}V_xV_x^*\right)Q\right\|$$

$$= \left\|\sum_{x\in F}\lambda_{x,x}V_xV_x^*\right\|$$

Berdasarkan Lemma 4.1, terdapat $x_M\in F$ sedemikian sehingga

$$\left\|\sum_{x\in F}\lambda_{x,x}V_xV_x^*\right\| = \left|\sum_{x\leq x_M}\lambda_{x,x}\right|. \tag{2.6}$$

Misal $\delta = \min\{x-y : x,y\in F \text{ dan } x>y\}$, dan bentuk $Q = V_{x_M}(1-V_\delta V_\delta^*)V_{x_M}^*$. Akan dibuktikan kondisi (2.5). Untuk $x\in F$, jika $x>x_M$ maka $x\geq x_M+\delta$. Perhatikan

$$\begin{aligned}QV_xV_x^* &= (V_{x_M}(1-V_\delta V_\delta^*)V_{x_M}^*)V_xV_x^*\\ &= \left(V_{x_M}V_{x_M}^* - V_{x_M}V_\delta V_\delta^*V_{x_M}^*\right)V_xV_x^*\\ &= \left(V_{x_M}V_{x_M}^* - V_{x_M}V_\delta(V_{x_M}V_\delta)^*\right)V_xV_x^*\\ &= \left(V_{x_M}V_{x_M}^* - V_{x_M+\delta}(V_{x_M+\delta})^*\right)V_xV_x^*\\ &= V_{x_M}V_{x_M}^*V_xV_x^* - V_{x_M+\delta}\left(V_{x_M+\delta}\right)^*V_xV_x^*.\end{aligned}$$

Jika $x>x_M$, maka berdasarkan pembuktian pada Proposisi 4.2 (ii), $V_{x_M}V_{x_M}^*\geq V_xV_x^*$, akibatnya $V_{x_M}V_{x_M}^*V_xV_x^* = V_xV_x^*$. Jika $x\geq x_M+\delta$, maka $V_{x_M+\delta}\left(V_{x_M+\delta}\right)^*\geq V_xV_x^*$ dan akibatnya $V_{x_M+\delta}\left(V_{x_M+\delta}\right)^*V_xV_x^* = V_xV_x^*$. Di lain pihak, jika $x\leq x_M$ maka $V_xV_x^*\geq V_{x_M}V_{x_M}^*$ dan $V_xV_x^*\geq V_{x_M+\delta}\left(V_{x_M+\delta}\right)^*$, akibatnya $V_{x_M}V_{x_M}^*V_xV_x^* = V_{x_M}V_{x_M}^*$ dan $V_{x_M+\delta}\left(V_{x_M+\delta}\right)^*V_xV_x^* = V_{x_M+\delta}\left(V_{x_M+\delta}\right)^*$. Jadi

$$QV_xV_x^* = V_{x_M}V_{x_M}^*V_xV_x^* - V_{x_M+\delta}\left(V_{x_M+\delta}\right)^*V_xV_x^*$$

$$= \begin{cases} V_xV_x^* - V_xV_x^* = 0 & \text{jika } x>x_M,\\ V_{x_M}V_{x_M}^* - V_{x_M+\delta}\left(V_{x_M+\delta}\right)^* = Q & \text{jika } x\leq x_M.\end{cases} \tag{2.7}$$

Akibatnya berdasarkan (2.6) diperoleh

$$\begin{aligned}\left\|Q\left(\sum_{x\in F}\lambda_{x,x}V_xV_x^*\right)Q\right\| &= \left\|\sum_{x\leq x_M}\lambda_{x,x}Q\right\|\\ &= \left|\sum_{x\leq x_M}\lambda_{x,x}\right|\|Q\|\\ &= \left|\sum_{x\leq x_M}\lambda_{x,x}\right|\\ &= \left\|\sum_{x\in F}\lambda_{x,x}V_xV_x^*\right\|,\end{aligned}$$

jadi terbukti kondisi (2.5).

Sekarang, akan dibuktikan kondisi (2.4). Perhatikan bahwa dari (2.7) diperoleh $QV_xV_x^* = 0$ jika $x > x_M$ dan $QV_xV_x^* = Q$ jika $x \leq x_M$. Akibatnya

$$(QV_xV_x^*)^* = Q^* \Leftrightarrow V_xV_x^*Q^* = Q^* \Leftrightarrow V_xV_x^*Q = Q.$$

Diperoleh $QV_xV_x^* = Q = V_xV_x^*Q$. Dengan kata lain $QV_xV_x^*$ *self-adjoint* untuk setiap $x \in F$ dan Q dan $V_xV_x^*$ saling komutatif. Oleh karena itu

$$QV_xV_y^*Q = \begin{cases} QV_{x-y}V_yV_y^*Q = QV_{x-y}QV_yV_y^* & \text{jika } x > y, \\ QV_{y-x}^*V_xV_{y-x}V_y^*Q = QV_{y-x}^*V_yV_y^*Q = QV_{y-x}^*QV_yV_y^* & \text{jika } x < y. \end{cases}$$

Untuk $x < y$, $QV_{y-x}^*QV_yV_y^* = 0$ jika dan hanya jika $(QV_{y-x}^*QV_yV_y^*)^* = V_yV_y^*QV_{y-x}Q = 0$. Jadi cukup ditunjukkan $QV_{x-y}Q$ jika $x > y$ dan $x, y \in F$. Perhatikan

$$\begin{aligned}
QV_{x-y}Q &= V_{x_M}(1 - V_\delta V_\delta^*)V_{x_M}^*V_{x-y}V_{x_M}(1 - V_\delta V_\delta^*)V_{x_M}^* \\
&= V_{x_M}(1 - V_\delta V_\delta^*)V_{x_M}^*V_{x-y+x_M}(1 - V_\delta V_\delta^*)V_{x_M}^* \\
&= V_{x_M}(1 - V_\delta V_\delta^*)V_{x_M}^*V_{x_M+x-y}(1 - V_\delta V_\delta^*)V_{x_M}^* \\
&= V_{x_M}(1 - V_\delta V_\delta^*)V_{x_M}^*V_{x_M}V_{x-y}(1 - V_\delta V_\delta^*)V_{x_M}^* \\
&= V_{x_M}(1 - V_\delta V_\delta^*)V_{x-y}(1 - V_\delta V_\delta^*)V_{x_M}^* \\
&= V_{x_M}(V_{x-y} - V_\delta V_\delta^*V_{x-y})(1 - V_\delta V_\delta^*)V_{x_M}^* \\
&= V_{x_M}(V_{x-y} - V_\delta V_\delta^*V_{x-y-\delta+\delta})(1 - V_\delta V_\delta^*)V_{x_M}^* \\
&= V_{x_M}(V_{x-y} - V_\delta V_\delta^*V_{\delta+x-y-\delta})(1 - V_\delta V_\delta^*)V_{x_M}^* \\
&= V_{x_M}(V_{x-y} - V_\delta V_\delta^*V_\delta V_{x-y-\delta})(1 - V_\delta V_\delta^*)V_{x_M}^* \\
&= V_{x_M}(V_{x-y} - V_\delta V_{x-y-\delta})(1 - V_\delta V_\delta^*)V_{x_M}^* \\
&= V_{x_M}(V_{x-y} - V_{\delta+x-y-\delta})(1 - V_\delta V_\delta^*)V_{x_M}^* \\
&= V_{x_M}(V_{x-y} - V_{x-y})(1 - V_\delta V_\delta^*)V_{x_M}^* \\
&= V_{x_M}(0)(1 - V_\delta V_\delta^*)V_{x_M}^* \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Jadi kondisi (2.4) terbukti. Dengan demikian, telah dikonstruksi suatu proyeksi Q sehingga kondisi

$$\left\|\sum_{x \in F} \lambda_{x,x} V_xV_x^*\right\| \leq \left\|\sum_{x,y \in F} \lambda_{x,y} V_xV_y^*\right\|$$

terpenuhi untuk semua subset berhingga F dari Γ^+ dan $\lambda_{x,y} \in \mathbb{C}$

Referensi

[1] S. Adji, M. Laca, M. Nilsen dan I. Raeburn. (1994). *Crossed Products by Semigroups of Endomorphisms and the Toeplitz Algebras of Ordered Groups*. Proc. Amer. Math. Soc. 122. 1133-1141.

[2] S. Boyd, N. Keswani dan I. Raeburn. (1993). *Faithful Representations of Crossed Products by Endomorphisms.* Proc. Amer. Math. Soc 118. 427-436.

[3] Raeburn, I. (1988). *On Crossed Products and Takai Duality*. Edinburgh Mathematical Society 31. 321-330.