EKSISTENSI *ISOMORPHIC REFINEMENTS* DARI DUA *DC-GROUP* YANG ISOMORFIK

Mirna*, Rizky Rosjanuardi, Isnie Yusnitha
Departemen Pendidikan Matematika FPMIPA UPI
*Surel: mirnaaina19@gmail.com

ABSTRAK. Misalkan $\mathbf{G} = (G, C)$ adalah *cyclically ordered group* dan $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ adalah subgrup dari $\mathbf{G}$ sedemikian sehingga memenuhi beberapa kondisi. Berdasarkan asumsi tersebut, didefinisikan dekomposisi produk leksikografik pada $\mathbf{G}$ dengan faktor $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$, dinotasikan dengan $\mathbf{G} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$. Lebih lanjut, suatu dekomposisi produk leksikografik pada *cyclically ordered group* akan memiliki *refinement*. Misalkan $\mathbf{G}$ dan $\mathbf{H}$ adalah *dc-group* yang isomorfik, yang dinyatakan sebagai dekomposisi produk leksikografik berhingga dari masing-masing subgrupnya, maka akan selalu memiliki *isomorphic refinements*.
Kata kunci: *cyclically ordered group*, *dc-group*, homomorfisma pada *cyclically ordered group*, dekomposisi produk leksikografik, *refinements*.

ABSTRACT. Let $\mathbf{G} = (G, C)$ be a cyclically ordered group and $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ be subgroups of $\mathbf{G}$ such that some conditions are satisfied. Based on these assumptions, defined a lexicographic product decomposition on $\mathbf{G}$ with factors $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$, denoted by $\mathbf{G} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$. Furthermore, a lexicographic product decomposition of the cyclically ordered group will have a refinement. Let $\mathbf{G}$ and $\mathbf{H}$ be an isomorphic dc-group, expressed as the finite lexicographic product decomposition of each of its subgroups, then it will always have isomorphic refinements.
Keywords: cyclically ordered group, dc-group, homomorphism of cyclically ordered group, lexicographic product decomposition, refinements.

1 PENDAHULUAN

Dalam matematika, untuk mengatur urutan suatu objek yang diilustrasikan seperti lingkaran adalah menggunakan *cyclic order*. Suatu *cyclic order* didefinisikan sebagai *ternary relation* yang memenuhi sifat *strict*, total, siklik dan transitif, sebagaimana yang disampaikan Novak dalam [5]. Konsep *cyclic order* pertama kali diperkenalkan oleh L. Rieger [8]. Selanjutnya, suatu himpunan yang dilengkapi dengan *cyclic order* disebut dengan *cyclically ordered set*, dan suatu grup yang dilengkapi dengan cyclic order yang kompatibel dengan operasinya disebut dengan *cyclically ordered group* [2]. Konsep *cyclically ordered group* pertama kali dikaji oleh L. Rieger [8], lalu menarik perhatian banyak ilmuwan untuk mengkajinya. Misalnya Novak dan Novonty yang membahas operasi pada kelas *cyclically ordered set* dalam [6], Jakubik dan Pringerova yang membahas kaitan antara *cyclic order* dengan *linear order* dalam [4], Cernak yang membahas dekomposisi produk leksikografik berhingga dari suatu *dc-group* dalam [1], Giraudet, Leluop dan Lucas yang membahas prosedur mengkonstruksi *linearly ordered group* dari *cyclically ordered group* dalam [2], Rosjanuardi yang membahas *cyclically ordered semi groups* dalam [9].

Berdasarkan uraian di atas, pada artikel ini akan dijelaskan konsep *dc-group*, konsep dekomposisi produk leksikografik pada *cyclically ordered group* dan *refinement*nya, serta bagaimana kaitan antara *dc-group* dengan dekomposisi produk leksikografik pada *cyclically ordered group*.

2 *CYCLICALLY ORDERED GROUP*

Fokus pembahasan pada artikel ini adalah konsep *dc-group*, konsep dekomposisi produk leksikografik pada *cyclically ordered group* dan *refinement*nya, serta kaitan antara *dc-group* dengan dekomposisi produk leksikografik pada *cyclically ordered group*. Sekarang akan dijelaskan terlebih dahulu beberapa konsep yang mendasari fokus pembahasan.

Definisi 2.1. ([7, hlm. 284])
Misalkan G adalah suatu himpunan. Sembarang subhimpunan C dari G^3, ($C \subseteq G^3$) disebut *ternary relation* pada G.

Contoh 2.2.
$S = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + 3y^2 = 1, x, y, z \in \mathbb{R}\}$ adalah sebuah *ternary relation*.

Definisi 2.3. ([9, Definition 1])
Misalkan G adalah suatu himpunan, C sebuah *ternary relation* pada G. Relasi C disebut:

a. *strict*, jika $(x, y, z) \in C$ maka $x \neq y \neq z \neq x$,

b. total, jika $x \neq y \neq z \neq x$ maka $(x, y, z) \in C$ atau $(x, z, y) \in C$,

c. siklik, jika $(x, y, z) \in C$ maka $(y, z, x) \in C$,

d. transitif, jika $(x, y, z) \in C$ dan $(y, u, z) \in C$ maka $(x, u, z) \in C$.

Definisi 2.4. ([2, hlm.1])
Misalkan G adalah suatu himpunan, dan C sebuah *ternary relation* pada G. Jika C bersifat *strict*, total, siklik dan transitif maka C disebut *cyclic order* pada G.

Teorema 2.5. ([5, Theorem 3.5])
Misalkan G adalah suatu himpunan, dan $<$ order pada G. Didefinisikan *ternary relation* $C_<$ pada G sebagai berikut: $x, y, z \in G,\ x \neq y \neq z \neq x\ (x, y, z) \in C_< \Leftrightarrow x < y < z$ atau $y < z < x$ atau $z < x < y$. Maka $C_<$ adalah *cyclic order* pada G.

Bukti. Misalkan $x, y, z \in G, (x, y, z) \in C_<$. Maka $x < y < z$ atau $y < z < x$ atau $z < x < y$, sehingga $z < y < x$ dan $y < x < z$ dan $x < z < y$ tidak berlaku. Dengan demikian $(z, y, x) \notin C_<$ ini artinya $C_<$ total. Misalkan $x, y, z, u \in G, (x, y, z) \in C_<, (x, z, u) \in C_<$. Maka

$$x < y < z, x < z < u \tag{1}$$
$$x < y < z, u < x < z \tag{2}$$
$$y < z < x, z < u < x \tag{3}$$
$$z < x < y, z < u < x \tag{4}$$

Berdasarkan relasi (1),(2),(3),(4) berturut-turut diperoleh $x < y < u,\ u < x < y,\ y < u < x,\ u < x < y$. Dengan demikian $(x, y, u) \in C_<$ ini artinya $C_<$ transitif. Misalkan $x, y, z \in G, (x, y, z) \in C_<$. Maka berdasarkan definisi dari relasi $C_<$ pada G menunjukkan bahwa $(y, z, x) \in C$ ini artinya $C_<$ siklik. Karena relasi $C_< \in G$ bersifat *strict*, total, transitif dan siklik maka relasi $C_<$ *cyclic order* pada G. □

Contoh 2.6. ([2, Example 1.2.1])
Misalkan K himpunan semua bilangan kompleks z, dengan $|z| = 1$, yang dinotasikan

$$K = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} = \{e^{i\theta_z}; \theta_z \in [0, 2\pi)\}$$

Untuk setiap $x, y, z, u \in K$ terdapat $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \in [0, 2\pi)$ sedemikian sehingga $x = e^{i\theta_1}, y = e^{i\theta_2}, z = e^{i\theta_3}, u = e^{i\theta_4}$ dan *ternary relation* C pada K didefinisikan sebagai berikut: untuk setiap $x, y, z \in K, (x, y, z) \in C \Leftrightarrow \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ atau $\theta_2 < \theta_3 < \theta_1$ atau $\theta_3 < \theta_1 < \theta_2$. Maka C adalah *cyclic order* pada K.

Contoh 2.7. ([5, hlm. 465])
$\mathbb{Z}$ dengan *ternary relation* $C_<$ pada $\mathbb{Z}$ didefinisikan dengan: untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z},\ (x, y, z) \in C_< \Leftrightarrow x < y < z$ atau $y < z < x$ atau $z < x < y$. Maka $C_<$ adalah *cyclic order* pada $\mathbb{Z}$.

Selanjutnya, suatu grup yang dilengkapi dengan *cyclic order* disebut dengan *cyclically ordered group*. Berikut adalah definisi dari *cyclically ordered group*.

Definisi 2.8. ([2, hlm.1])
(G, C) dikatakan *cyclically ordered group* jika G grup, dan C adalah *cyclic order* pada himpunan G yang sesuai dengan operasi pada grup G, yaitu memenuhi: Untuk setiap $x, y, z, v, w \in G, (x, y, z) \in C$ maka

$$(wxv, wyv, wzv) \in C$$

untuk operasi perkalian pada G, atau

$$(w + x + v, w + y + v, w + z + v) \in C$$

untuk operasi penjumlahan pada G.

Contoh 2.9. ([2, Example 1.2.1])
Misalkan K himpunan semua bilangan kompleks z, dengan $|z| = 1$, yang dinotasikan

$$K = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} = \{e^{i\theta_z}; \theta_z \in [0, 2\pi)\}$$

Untuk setiap $x, y, z \in K$ terdapat $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [0, 2\pi)$ sedemikian sehingga $x = e^{i\theta_1}, y = e^{i\theta_2}, z = e^{i\theta_3}$ dan *ternary relation* C pada K didefinisikan sebagai berikut: untuk setiap $x, y, z \in K, (x, y, z) \in C \Leftrightarrow \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ atau $\theta_2 < \theta_3 < \theta_1$ atau $\theta_3 < \theta_1 < \theta_2$. Maka (K, C) adalah *cyclically ordered group.*

Contoh 2.10 (Kaitan antara *linear order* dengan *cyclic order*)**.**
$\mathbb{Z}$ dengan *ternary relation* $C_<$ pada $\mathbb{Z}$ yang didefinisikan dengan: Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z},\ x \neq y \neq z \neq x,\ (x, y, z) \in C_< \Leftrightarrow x < y < z$ atau $y < z < x$ atau $z < x < y$. Maka $(\mathbb{Z}, C_<)$ adalah *cyclically ordered group.*

3 PEMBAHASAN

Salah satu tipe khusus dari *cyclically ordered group* adalah *dc-group.* Berikut definisi dan contoh dari *dc-group.*

Definisi 3.1. ([1, hlm.30])
Sebuah *cyclically ordered group* (G, C) disebut *dc-group* jika untuk setiap $x, y \in G$ dengan $x \neq y$ maka terdapat $z \in G$ sedemikian sehingga $(x, y, z) \in C$ atau $(x, z, y) \in C$.

Contoh 3.2.
Misalkan $(\mathbb{Z}, C)$ adalah *cyclically ordered group* dengan *ternary relation* C pada G didefinisikan $(a, b, c) \in C$ jika dan hanya jika $a < b < c$ atau $b < c < a$ atau $c < a < b,\ \forall\ a, b, c \in \mathbb{Z}$. Maka $(\mathbb{Z}, C)$ adalah *dc-group.*

Contoh 3.3. ([3, Example 5.1])
Misalkan $G = \mathbb{R}^3$ grup dari himpunan semua triplet (x, y, z) dengan $x, y, z \in \mathbb{R}$. *Ternary relation* pada $\mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai berikut: $(x, y, z) \in C_<$ jika dan hanya jika $x < y < z$ atau $y < z < x$ atau $z < x < y$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$. Operasi penjumlahan pada G didefinisikan dengan operasi titik demi titik. Selanjutnya didefinisikan *ternary relation* C pada G sebagai berikut: misalkan $a_i = (x_i, y_i, z_i) \in G,\ i = 1, 2, 3,\ (a_1, a_2, a_3) \in C$ jika dan hanya jika

1. $(x_1, x_2, x_3) \in C_<$ dan
2. $y_1 = y_2 = y_3,\ z_1 = z_2 = z_3$.

Maka $(G, +, C)$ adalah *cyclically ordered group*, tetapi bukan *dc-group.*

Selanjutnya, suatu *cyclically ordered group* dapat dinyatakan sebagai dekomposisi produk leksikografik dari subgrup-subgrupnya. Berikut definisinya.

Definisi 3.4. ([1, hlm.31])
Misalkan $\mathbf{G} = (G, C)$ *cyclically ordered group.* $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ adalah subgrup dari $\mathbf{G}$ sedemikian sehingga kondisi berikut terpenuhi:

(L1) Untuk setiap $g \in G$, terdapat elemen yang tunggal $a \in A$ dan $b \in B$ sedemikian sehingga $g = a + b$.

(L2) Jika $g_i = a_i + b_i,\ a_i \in A,\ b_i \in B\ (i = 1, 2)$ maka $g_1 + g_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)$.

(L3) Jika $g_1,\ g_2,\ g_3 \in G$ yang berbeda, $g_i = a_i + b_i,\ a_i \in A,\ b_i \in B\ (i = 1, 2, 3)$, maka $(g_1, g_2, g_3) \in C$ jika dan hanya jika $(a_1, a_2, a_3) \in C$ atau $a_1 = a_2 = a_3$ dan $(b_1, b_2, b_3) \in C$.

Berdasarkan asumsi di atas, dinotasikan $\mathbf{G} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$, persamaan ini disebut dekomposisi produk leksikografik pada $\mathbf{G}$ dengan faktor $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$.

Lemma 3.5. ([1, Lemma 2.1])
Misalkan $\mathbf{G} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$, maka $\mathbf{G}/\mathbf{B} \simeq \mathbf{A}$.

Lemma 3.6. ([1, Lemma 3.3])
Misalkan

(i.) $\mathbf{G} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$

(ii.) $\mathbf{G} = \mathbf{D} \circ \mathbf{E}$

dengan $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ subgrup dari $\mathbf{G}$. Jika $\mathbf{B}$ dan $\mathbf{E}$ adalah *dc-group*, maka $B \subseteq E$ atau $E \subseteq B$.

Definisi 3.7. ([1, hlm.34])
Misalkan $\mathbf{G} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B},\ X \subseteq G$, maka:

$$X(A)(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) = \{a \in A;\ \exists\ x \in X,\ b \in B,\ x = a + b\}$$
$$X(B)(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) = \{b \in B;\ \exists\ x \in X,\ a \in A,\ x = a + b\}$$

Lemma 3.8. ([1, Lemma 3.4])
Misalkan

(i.) $\mathbf{G} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$

(ii.) $\mathbf{G} = \mathbf{D} \circ \mathbf{E}$

dan $E \subseteq B$, maka $\mathbf{B} = (\mathbf{B} \cap \mathbf{D}) \circ \mathbf{E}$, dan $B \cap D = B(D)(\mathbf{D} \circ \mathbf{E})$.

Lemma 3.9. ([1, Lemma 2.2])
Misalkan $\mathbf{G} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$, $\mathbf{G}$ adalah *dc-group* jika dan hanya jika $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ adalah *dc-group*.

Untuk pembuktian Lemma 3.5, Lemma 3.6, Lemma 3.8, dan Lemma 3.9 dapat merujuk ke [1].

Teorema 3.10. ([1, Theorem 3.8])
Misalkan

(i.) $\mathbf{G} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$

(ii.) $\mathbf{G} = \mathbf{B} \circ \mathbf{D}$

maka $\mathbf{A} \simeq \mathbf{D}$.

Bukti. Berdasarkan

(i.) $\mathbf{G} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$

(ii.) $\mathbf{G} = \mathbf{B} \circ \mathbf{D}$

dan Lemma 3.5 diperoleh $\mathbf{G}/\mathbf{B} \simeq \mathbf{A}$ dan $\mathbf{G}/\mathbf{B} \simeq \mathbf{D}$. Karena $\mathbf{A} \simeq \mathbf{G}/\mathbf{B} \simeq \mathbf{D}$, maka $\mathbf{A} \simeq \mathbf{D}$. □

Definisi 3.11. ([1, hlm.35])
Misalkan

$$\mathbf{G} = G_1 \circ G_2 \circ G_3 \circ G_4 \circ ... \circ G_n \tag{5}$$

dan

$$G_i = G_{i1} \circ G_{i2} \circ ... \circ G_{im(i)} \quad (i = 1, 2, 3, ...n)$$

dari (5) diperoleh:

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= G_1 \circ G_2 \circ G_3 \circ G_4 \circ ... \circ G_n \\ &= G_{11} \circ G_{12} \circ ... \circ G_{1m(1)} \circ G_{21} \circ G_{22} \circ ... \circ G_{2m(2)} \circ ... \circ G_{n1} \circ ... \circ G_{nm(n)} \\ &= G_{11} \circ ... \circ G_{21} \circ ... \circ G_{n1} \circ ... \circ G_{nm(n)}\end{aligned}$$

dekomposisi produk leksikografik $\mathbf{G} = G_{11} \circ ... \circ G_{21} \circ ... \circ G_{n1} \circ ... \circ G_{nm(n)}$ dari $\mathbf{G}$ disebut sebagai sebuah *refinement* dari dekomposisi produk leksikografik (5).

Teorema 3.12. ([1, Theorem 3.9])
Misalkan $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$, G_i, H_j $(i = 1, 2, 3, ..., n;\ j = 1, 2, 3, ..., m)$ adalah *dc-group* sedemikian sehingga $\mathbf{G} \simeq \mathbf{H}$, dengan $\mathbf{G} = G_1 \circ G_2 \circ G_3 \circ G_4 \circ ... \circ$ dan $\mathbf{H} = H_1 \circ H_2 \circ H_3 \circ H_4 \circ ... \circ H_m$. Maka dekomposisi produk leksikografik $\mathbf{G}$ dan $\mathbf{H}$ memiliki *isomorphic refinements*.

Bukti. Pembuktian menggunakan proses induksi matematika dengan memperhatikan $m + n$. Misalkan $m + n \geq 2$. Untuk $m + n = 2$ pernyataan benar. Asumsikan bahwa $m + n > 2$. Misalkan $\mu : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$, μ adalah suatu isomorfisma *cyclically ordered group* dengan $\mu(G_i) = G'_i$ $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ maka $\mathbf{H} = G'_1 \circ G'_2 \circ G'_3 \circ G'_4 \circ ... \circ G'_n$.
Berdasarkan Lemma 3.6 diperoleh $G'_n \subseteq H_m$ atau $H_m \subseteq G'_n$. Misalkan $G'_n \subseteq H_m$, berdasarkan Lemma 3.8 diperoleh

$$H_m = (H_m \cap G'_1 \circ G'_2 \circ G'_3 \circ G'_4 \circ ... \circ G'_{n-1}) \circ G'_n$$

Misalkan $\mathbf{A} = H_m \cap G'_1 \circ G'_2 \circ G'_3 \circ G'_4 \circ ... \circ G'_{n-1}$, maka $\mathbf{H} = H_1 \circ H_2 \circ H_3 \circ H_4 \circ ... \circ \mathbf{A} \circ G'_n$.
Perhatikan bahwa $\mathbf{H} = G'_1 \circ G'_2 \circ G'_3 \circ G'_4 \circ ... \circ G'_n$ dan $\mathbf{H} = H_1 \circ H_2 \circ H_3 \circ ... \circ H_{m-1} \circ \mathbf{A} \circ G'_n$ maka berdasarkan Teorema 3.10 diperoleh $G'_1 \circ G'_2 \circ G'_3 \circ G'_4 \circ ... \circ G'_{n-1} \simeq H_1 \circ H_2 \circ H_3 \circ ... \circ H_{m-1} \circ \mathbf{A}$. □

4 KESIMPULAN

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa untuk dua *dc-group* yang isomorfik, yang dinyatakan sebagai dekomposisi produk leksikografik dari subgrup-subgrupnya akan selalu memiliki *isomorphic refinements*.

5 DAFTAR PUSTAKA

[1] Cernak, S. (1995). *Lexicographic product of cyclically ordered groups.* Mathematica Slovaca, 45(1), hlm. 29-38.

[2] Giraudet, M., Leluop, G., dan Lucas, F. (2013). *First Order Theory Of Cyclically Ordered Groups.* Math. LO, hlm. 1-12.

[3] Jakubik, J. (1994). *On extended cyclic orders.* Czechoslovak Math. Journal, 44(4), hlm. 661-675.

[4] Jakubik, J dan Pringerova, G. (1988). *Representations of cyclically ordered groups.* Casopis Pro Matematiky, 113(2), hlm. 184-196.

[5] Novak, V. (1982). *Cyclically ordered sets.* Czechoslovak Mathematical Journal, 32(3), hlm. 460-473.

[6] Novak, V dan Novonty, M. (1984). *On a power of cyclically ordered sets.* Casopis Pro Pestovani Matematuky, 109(4), hlm. 421-424.

[7] Novak, V dan Novonty, M. (1992). *Binary and ternary relations.* Mathematica Bohemica, 117(3), hlm. 283-297.

[8] Rieger, L. (1946). *On ordered and cyclically ordered groups.* Vestnik Kral, hlm. 1-31.

[9] Rosjanuardi, R. (2017). *Crossed Products Related to Cyclically Ordered Semi Groups.* IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series **812** 012045.