INTEGRAL PERRON DAN EKUIVALENSINYA DENGAN INTEGRAL DENJOY

Riva Yasin Nurandini, Encum Sumiaty, Cece Kustiawan
Departemen Pendidika Matematika FPMIPA UPI

*Surel: yasinurandini@gmail.com

ABSTRAK. Integral Perron adalah pengembangan dari integral Lebesgue, sehingga dengan menggunakan definisi integral Perron suatu fungsi yang tak terintegralkan Lebesgue dapat terintegralkan Perron. Sama halnya dengan integral Riemann dan integral Lebesgue, integral Perron juga memiliki sifat-sifat dasar integral diantaranya kelinearan, keterurutan, dan penambahan selang. Selain integral Perron, integral Denjoy juga merupakan pengembangan dari integral Lebesgue, hanya saja pendefinisian yang dilakukan oleh Denjoy berbeda dengan Perron. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dikaji hubungan antara integral Perron dan integral Denjoy, juga sifat-sifat yang dimiliki oleh integral Perron.

Kata Kunci : Fungsi Mayor, Fungsi Minor, Turunan Atas, Turunan Bawah, ACG_*, Integral Perron, Integral Denjoy.

ABSTRACT.The Perron Integral is the development of the integral Lebesgue, by using Perron's integral definition an unintegrated function of Lebesgue can be integrated Perron. Similar to the Riemann integral and the Lebesgue integral, the Perron integral also has the integral basic properties such as linearity, obedience, and the addition of a line. In addition to the integral Perron, the integral Denjoy is also the development of the integral Lebesgue, but the definition of Denjoy is different from Perron. Therefore, in this study will examine the relationship between the Perron integral and Denjoy integral, also the properties possessed by the Perron integral.

Keyword : Major Function, Minor Function, Upper Derivative, Lower Derivative, ACG_*, Perron Integral, Denjoy Integral.

1. PENDAHULUAN

Integral merupakan salah satu teori penting dalam matematika. Integral pertama kali didefinisikan dengan baik oleh Bernhard Riemann yang dilakukan pada fungsi-fungsi terbatas dengan cara kostruktif. Namun, definisi integral Riemaan tidak dapat mengintegralkan fungsi yang diskontinu di tak hingga banyak titik, contohnya fungsi dirichlet f : $[-4,4] \to \mathbb{R}$ yang di definisikan sebagai berikut :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & jika\ x\ bilangan\ irrasional\ pada\ [-4,4] \\ -2, & jika\ x\ bilangan\ rasional\ pada\ [-4,4] \end{cases}$$

Kemudian muncul pengembangan integral baru oleh H. Lebesgue. Definisi integral Lebesgue menggunakan teori ukuran, sehingga fungsi yang tidak terintegrlakan Riemann terintegralkan Lebesgue. Namun integral Lebesgue masih memiliki kekurangan, yaitu mengharuskan F sebagai fungsi yang kontinu mutlak (AC). agar F' terintegrakan Lebegue, sehingga Integral Lebesgue dari suatu interval tidak secara lengkap menyelesaikan masalah rekonstruksi fungsi primitif dari turunannya. Contohnya : Hamzah (2009,47)

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x^2}), & jika\ 0 < x \leq 1 \\ 0, & jika\ x = 0 \end{cases}$$

Fungsi tersebut mempunyai turunan pada setiap titik di [0,1], tetapi F tidak kontinu mutlak pada [0,1]. Akibatnya, fungsi F' tidak terintegralkan Lebesgue pada [0,1].

Integral Lebesgue dikembangkan oleh Perron yang dalam pendefinisiannya melibatkan fungsi mayor dan fungsi minor. Selain itu, Denjoy juga melakukan pengembangan integral Lebesgue dengan mensyaratkan adanya suatu anti turunan dari suatu fungsi yang merupakan ACG_* agar fungsi tersebut terintegralkan Denjoy, sehingga dapat dilihat adanya keterkaitan antara integral Perron dan integral Denjoy. Oleh karena itu, rumusan masalah yang dikaji dalam penelitian ini mengenai sifat-sifat integral Perron dan ekuivalensi integral Perron dan integral Denjoy.

2. KAJIAN TEORI

Definisi 2.1.1 (Gordon, 1994)

Misal $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Turunan kanan atas dan turunan kanan bawah dari F pada $x \in [a, b)$ didefinisikan oleh :

$$D^+F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x < y < x + \delta \right\}$$

$$D_+F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \inf \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x < y < x + \delta \right\}$$

dan, turunan kiri atas dan turunan kiri bawah dari F pada $x \in (a, b]$ didefinisikan oleh :

$$D^-F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x - \delta < y < x \right\}$$

$$D_-F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \inf \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x - \delta < y < x \right\}$$

Fungsi F dapat diturunkan pada $x \in (a, b)$ jika keempat turunannya hingga dan bernilai sama. Turunan atas dan turunan bawah dari F pada $x \in [a, b]$ didefinisikan oleh :

$$\overline{\mathrm{D}}\, F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup \left\{ \tfrac{F(y)-F(x)}{y-x} : 0 < |y - x| < \delta \right\}$$
$$= \max\{D^+F(x), D^-F(x)\}$$
$$\underline{\mathrm{D}}F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \inf \left\{ \tfrac{F(y)-F(x)}{y-x} : 0 < |y - x| < \delta \right\}$$
$$= min\{D_+F(x), D_-F(x)\}$$

Definisi 2.1.2 (Gordon, 1994)

Misal $E \subseteq \mathbb{R}$. Himpunan E adalah *perfect* jika E tutup dan setiap titik dari E adalah titik limit dari E.

Suatu *perfect portion* dari P adalah himpunan $P \cap [c, d]$ dimana $P \cap (c, d) \neq \emptyset$, $c, d \in P$, dan $P \cap [c, d]$ adalah *perfect set* (Gordon, 1994, hal. 70).

Definisi 2.1.3 (Gordon, 1994)

Misalkan $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dan $E \subseteq [a, b]$.

a. Variasi lemah dari F pada E dan variasi kuat dari F pada E didefinisikan sebagai ;

$$V(F,E) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |F(d_i) - F(c_i)|\}$$
$$V_*(F,E) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} \omega(F,[c_i,d_i])\}$$

dengan supremum keduanya diambil atas semua koleksi hingga $\{[c_i,d_i] : 1 \leq i \leq n\}$ dari interval yang tidak saling tumpang tindih yang mempunyai titik ujung di E.

b. Fungsi F adalah variasi terbatas dari E ($F \in BV(E)$) jika $V(F,E)$ berhingga. Fungsi F adalah variasi terbatas dalam arti sempit pada E ($F \in BV_*(E)$) jika $V_*(F,E)$ berhingga.

c. Fungsi F adalah variasi terbatas yang digeneralisasi pada E ($F \in BVG(E)$) jika E dapat ditulis sebagai gabungan terhitung dari himpunan-himpunan dimana F adalah BV pada setiap himpunan tersebut. Fungsi F adalah variasi terbatas yang digeneralisasi dalam arti sempit pada E ($F \in BVG_*(E)$) jika E dapat ditulis sebagai gabungan terhitung dari himpunan-himpunan dimana F adalah BV_* pada setiap himpunan tersebut.

d. Fungsi F adalah kontinu mutlak pada E ($F \in AC(E)$) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n} |F(d_i) - F(c_i)| < \varepsilon$ ketika $\{[c_i,d_i], 1 \leq i \leq n\}$ adalah koleksi berhingga dari interval-interval yang tidak saling tumpang tindih yang mempunyai titik ujung di E dan memenuhi $\sum_{i=1}^{n}(d_i - c_i) < \delta$. Fungsi F adalah kontinu mutlak dalam arti sempit pada E ($F \in AC_*(E)$) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n} \omega(F,[c_i,d_i]) < \varepsilon$ ketika $\{[c_i,d_i], 1 \leq i \leq n\}$ adalah koleksi berhingga dari interval-interval yang tidak saling tumpang tindih yang mempunyai titik ujung di E dan memenuhi $\sum_{k=1}^{n}(d_i - c_i) < \delta$.

e. Fungsi F adalah kontinu mutlak yang digeneralisasi pada E ($F \in ACG(E)$) jika $F|_E$ kontinu pada E dan E dapat ditulis sebagai gabungan terhitung dari himpunan-himpunan dimana F adalah AC pada setiap himpunan tersebut. Fungsi F adalah kontinu mutlak yang digeneralisasi dalam arti sempit pada E ($F \in ACG_*(E)$) jika $F|_E$ kontinu pada E dan E dapat ditulis sebagai gabungan terhitung dari himpunan-himpunan dimana F adalah AC_* pada setiap himpunan tersebut.

Definisi 2.1.4 (Gordon, 1994)

Misalkan fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}_e$.

a. Suatu fungsi $U : [a,b] \to \mathbb{R}$ disebut fungsi mayor dari f pada interval $[a,b]$ jika $\underline{D}U(x) > -\infty$ dan $\underline{D}U(x) \geq f(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$.
b. Suatu fungsi $V : [a,b] \to \mathbb{R}$ disebut fungsi minor dari f pada interval $[a,b]$ jika $\overline{D}\,V(x) < +\infty$ dan $\overline{D}\,V(x) \leq f(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$.

3. METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam karya tulis ini adalah metode studi literatur yang dilakukan dengan mengkaji definisi dan sifat-sifat integral Perron, definisi dan sifat-sifat integral Denjoy, dan ekuivalensi antara integral Perron dan integral Denjoy.

Pada tahun 2017, penulis mempelajari tentang integral Lebesgue pada mata kuliah Teori ukuran dan Integral Lebesgue. Integral Lebesgue merupakan pengembangan dari integral Riemann. Pada tahun 2018, penulis mempelajari lebih jauh tentang sifat-sifat integral Lebesgue hingga didapatlah kekurangan dari integral Lebesgue, yaitu definisi Integral Lebesgue dari suatu interval tidak secara lengkap menyelesaikan masalah rekonstruksi fungsi primitive dari turunannya. Kemudian, kajian dilanjutkan pada integral lain yang merupakan pengembangan dari integral Lebesgue, yaitu integral Perron dan integral Denjoy.

Setelah mempelajari tentang integral Perron dan integral Denjoy, ditemukan bahwa kedua integral tersebut didefinisikan dengan cara berbeda tetapi bertujuan untuk menyelesaikan masalah yang sama yang tidak dapat diselesaikan oleh integral Lebesgue. Atas dasar inilah penulis tertarik untuk mengkaji mengenai ekuivalensi antara integral Perron dan integral Denjoy.

Kajian mengenai integral ini menggunakan buku "Theory of the Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock Integral" karya Russell A. Gordon sebagai referensi utama. Pada tahun 2018, penulis menyusun proposal penelitian dan mempresentasikannya. Kemudian semua teori dan hasil kajian didiskusikan dengan dosen pembimbing. Setelah semua teori dan pembahasan selesai, penulis mempublikasikan temuan dalam bentuk tulisan berupa skripsi dan dalam bentuk lisan saat sidang skripsi.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Integral Perron

Definisi 4.1.1

Suatu fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}_e$ terintegralkan Perron pada $[a,b]$ jika f mempunyai setidaknya satu fungsi mayor U dan satu fungsi minor V pada $[a,b]$ dan berlaku

$$\inf\{\mathrm{U}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} : \mathrm{U} \text{ fungsi mayor dari } f \text{ pada } [a,b]\} = \sup\{V_a^b : V \text{ fungsi minor dari } f \text{ pada } [a,b]\}$$

Suatu fungsi f yang terintegralkan Perron pada $[a,b]$ dinotasikan dengan $f \in P[a,b]$ dengan nilai integralnya dinotasikan $(P)\int_a^b f$ dan didefinisikan $(P)\int_a^b f = \inf\{U_a^b\} = \sup\{V_a^b\}$

Contoh :

Misalkan $f : [-4,4] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-4,4]\backslash\mathbb{Q} \\ 2, & x \in [-4,4]\cap\mathbb{Q} \end{cases}$$

Fungsi f tidak terintegralkan Riemann karena f diskontinu di tak hingga banyak titik. Akan ditunjukkan f terintegrakan Perron pada $[-4,4]$.

Misal $\{U_{-4}^4\}$ adalah himpunan nilai $U(4) - U(-4)$ dimana U adalah fungsi mayor dari f pada [-4,4] dan $\{V_{-4}^4\}$ adalah himpunan nilai $V(4) - V(-4)$ dimana V adalah fungsi minor dari f pada [-4,4].

Pilih $P(x) = Q(x) = \begin{cases} x, & x \in [-4,4]\backslash\mathbb{Q} \\ -2x, & x \in [-4,4]\cap\mathbb{Q} \end{cases}$ untuk $x \in [-4,4]$. Akan ditunjukkan bahwa $P(x) \in \{U_{-4}^4\}$ dan $Q(x) \in \{V_{-4}^4$.

$$\underline{D}P(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\delta\to 0^+} \inf\left\{\dfrac{P(y)-P(x)}{y-x} : 0 < |y-x| < \delta\right\}, y \in [-4,4]\backslash\mathbb{Q} \\ \lim\limits_{\delta\to 0^+} \inf\left\{\dfrac{P(y)-P(x)}{y-x} : 0 < |y-x| < \delta\right\}, y \in [-4,4]\cap\mathbb{Q} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{\delta\to 0^+} \inf\left\{\dfrac{y-x}{y-x} : 0 < |y-x| < \delta\right\}, & y \in [-4,4]\backslash\mathbb{Q} \\ \lim\limits_{\delta\to 0^+} \inf\left\{\dfrac{-2y+2x}{y-x} : 0 < |y-x| < \delta\right\}, y \in [-4,4]\cap\mathbb{Q} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{\delta \to 0^+} \inf\{1\}, & y \in [-4,4] \backslash \mathbb{Q} \\ \lim\limits_{\delta \to 0^+} \inf\left\{\dfrac{-2(y-x)}{y-x}\right\}, & y \in [-4,4] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{\delta \to 0^+} \inf\{1\}, & y \in [-4,4] \backslash \mathbb{Q} \\ \lim\limits_{\delta \to 0^+} \inf\{-2\}, & y \in [-4,4] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & y \in [-4,4] \backslash \mathbb{Q} \\ -2, & y \in [-4,4] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

Diperoleh $\underline{D}P(x) > -\infty$ dan $\underline{D}P(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [-4,4]$, maka berdasarkan Definisi 2.7.1, $P(x) \in \{U_{-4}^{4}\}$.

Akan ditunjukkan $Q(x)$ fungsi minor dari f pada $[-4,4]$.

$$\overline{D}Q(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\delta \to 0^+} \sup\left\{\dfrac{Q(y)-Q(x)}{y-x} : 0 < |y-x| < \delta\right\}, & y \in [-4,4] \backslash \mathbb{Q} \\ \lim\limits_{\delta \to 0^+} \sup\left\{\dfrac{Q(y)-Q(x)}{y-x} : 0 < |y-x| < \delta\right\}, & y \in [-4,4] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{\delta \to 0^+} \sup\left\{\dfrac{y-x}{y-x} : 0 < |y-x| < \delta\right\}, & y \in [-4,4] \backslash \mathbb{Q} \\ \lim\limits_{\delta \to 0^+} \sup\left\{\dfrac{-2(y-x)}{y-x} : 0 < |y-x| < \delta\right\}, & y \in [-4,4] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{\delta \to 0^+} \sup\{1\}, & y \in [-4,4] \backslash \mathbb{Q} \\ \lim\limits_{\delta \to 0^+} \sup\{-2\}, & y \in [-4,4] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & y \in [-4,4] \backslash \mathbb{Q} \\ -2, & y \in [-4,4] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

Diperoleh $\overline{D}Q(x) < +\infty$ dan $\overline{D}Q(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [-4,4]$, maka berdasarkan Definisi 2.7.1.,$Q(x) \in \{V_{-4}^{4}\}$.

Sekarang, dapat dilihat bahwa :

$inf\{U_{-1}^{1}\} = P_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$ dan $sup\{V_{-1}^{1}\} = Q_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$

Diperoleh $inf\{U_{-1}^{1}\} = sup\{V_{-1}^{1}\} = \frac{7}{6}$

Oleh karena itu, $f \in P[-1,1]$ dengan $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{7}{6}$.

Definisi 4.1.2

Suatu fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}_e$ terintegralkan P_c pada $[a, b]$ jika f mempunyai setidaknya satu fungsi mayor kontinu U dan satu fungsi minor kontinu V pada $[a, b]$ dan berlaku

$\inf\{\mathrm{U}_\mathrm{a}^\mathrm{b}$: U fungsi mayor kontinu dari f pada $[a, b]\} = \sup\{V_a^b$: V fungsi minor kontinu dari f pada $[a, b]\}$

Suatu fungsi f yang terintegralkan P_c pada $[a, b]$ dinotasikan dengan $f \in P_c[a, b]$ dengan nilai integralnya dinotasikan $(P_c) \int_a^b f$ dan didefinisikan $(P_c) \int_a^b f = \inf\{U_a^b\} = \sup\{V_a^b\}$.

4.2. Sifat-Sifat Integral Perron

Teorema 4.2.1

Suatu fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}_e$ terintegralkan Perron pada $[a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu fungsi mayor U dan suatu fungsi minor V dari f pada $[a, b]$ sehingga $U_a^b - V_a^b < \varepsilon$.

Teorema 4.2.2

Misal $f : [a, b] \to \mathbb{R}_e$ dan misal $c \in (a, b)$.

a. Jika f terintegralkan Perron pada $[a, b]$, maka f terintegralkan Perron pada setiap subinterval dari $[a, b]$.
b. Jika f terintegralkan Perron pada setiap interval $[a, c]$ dan $[c, b]$, maka f terintegralkan Perron pada $[a, b]$ dan $(P) \int_a^b f = (P) \int_a^c f + (P) \int_c^b f$.

Teorema 4.2.3

Misal $f : [a, b] \to \mathbb{R}_e$ dan misal $c \in (a, b)$.

a. Jika f terintegralkan P_c pada $[a, b]$, maka f terintegralkan P_c pada setiap subinterval dari $[a, b]$.
b. Jika f terintegralkan P_c pada setiap interval $[a, c]$ dan $[c, b]$, maka f terintegralkan P_c pada $[a, b]$ dan $(P_c) \int_a^b f = (P_c) \int_a^c f + (P_c) \int_c^b f$.

Teorema 4.2.4

Jika $f : [a, b] \to \mathbb{R}_e$ terintegralkan Perron pada $[a, b]$, maka f bernilai hingga *almost everywhere* pada $[a, b]$.

Teorema 4.2.5

Misal $f : [a, b] \to \mathbb{R}_e$ terintegralkan Perron pada $[a, b]$. Jika $f = g$ *almost everywhere* pada $[a, b]$, maka g terintegralkan Perron pada $[a, b]$ dan $(P)\int_a^b f = (P)\int_a^b g$.

Teorema 4.2.6

Misalkan f terintegralkan Perron pada $[a, b]$, maka :

a. kf terintegralkan Perron pada $[a, b]$ dan$(P)\int_a^b kf = k(P)\int_a^c f$ untuk setiap $k \in \mathbb{R}$.
b. $f + g$ terintegralkan Perron pada $[a, b]$ dan $(P)\int_a^b (f + g) = (P)\int_a^b f + (P)\int_a^b g$.
c. Jika $f \leq g$ *almost everywhere* pada $[a, b], maka\ (P)\int_a^b f \leq (P)\int_a^b g$

Lemma 4.2.7

Misal $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Perron pada $[a, b]$ dan misal $F(x) = (P)\int_a^x f$untuk setiap $x \in [a, b]$. Jika U adalah fungsi mayor dan V adalah fungsi minor dari f pada $[a, b]$, maka fungsi $U - F$ dan $F - V$ adalah tidak menurun pada $[a, b]$.

Teorema 4.2.8

Misalkan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Perron pada $[a, b]$ dan misal $F(x) = (P)\int_a^x f$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka F fungsi kontinu pada $[a, b]$.

Teorema 4.2.9

Misal $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Perron pada $[a, b]$ dan misal $F(x) = \int_a^x f$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka F dapat diturunkan *almost everywhere* pada $[a, b]$ dan $F' = f$ *almost everywhere* pada $[a, b]$.

Teorema 4.2.10

Misalkan $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan P_c pada setiap subinterval $[c,d] \subseteq (a,b)$. Jika $(P_c)\int_c^D f$ konvergen ke suatu limit hingga saat $c \to a^+$ dan $d \to b^-$, maka $f \in P_c[a,b]$ dan $(P_c)\int_a^b f = \lim_{\substack{c \to a^+ \\ d \to b^-}} (P_c)\int_c^d f$.

Teorema 4.2.11

Misal E suatu himpunan tertutup dan terbatas dengan batas a dan b dan $\{(a_k, b_k)\}$ suatu barisan dari *intervals contiguous* ke E didalam $[a,b]$. Misalkan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan P_c pada E dan pada setiap interval $[a_k, b_k]$. Jika deret $\sum_{k=1}^{\infty} \omega(\int_{a_k}^{x} f, [a_k, b_k])$ konvergen, maka $f \in P_c[a,b]$ dan $\int_a^b f = \int_a^b f\chi_E + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} f$.

4.3. Ekuivalensi Integral Perron dan Integral Denjoy

Definisi 4.3.1

Suatu fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Denjoy pada $[a,b]$ jika terdapat suatu fungsi ACG* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $F'(x) = f(x)$ a.e pada $[a,b]$.

Teorema 4.3.2

Misal $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Denjoy pada $[a,b]$. Jika E adalah suatu himpunan *perfect* di $[a,b]$, maka terdapat suatu *perfect portion* $E \cap [c,d]$dari E sedemikian sehingga f terintegralkan Lebesgue pada $E \cap [c,d]$. Selanjutnya, deret $\sum_{k=1}^{\infty} \omega\left(\int_{c_k}^{x} f, [c_k, d_k]\right)$ konvergen dimana $[c,d] - E = \bigcup_{k=1}^{\infty} (c_k, d_k)$.

Teorema 4.3.3

Misalkan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Jika f terintegralkan Perron pada $[a,b]$, maka f terintegralkan Denjoy pada $[a,b]$.

Teorema 4.3.4

Misalkan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Jika f terintegralkan Denjoy pada $[a,b]$, maka f terintegralkan Perron pada $[a,b]$.

Contoh :

Misalkan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & jika\ 0 < x \le 1 \\ 0, & jika\ x = 0 \end{cases}$$

Fungsi f tidak terintegralkan Lebesgue karena anti turunan f bukan fungsi yang AC. Akan ditunjukkan bahwa f terintegralkan Perron.

Pada contoh Definisi 4.3.1., telah ditunjukkan bahwa f terintegralkan Denjoy, sekarang akan ditunjukkan bahwa f juga terintegralkan Perron.

Misal $\{U_0^1\}$ adalah himpunan nilai $U(1) - U(0)$ dimana U adalah fungsi mayor dari f pada [0,1] dan $\{V_0^1\}$ adalah himpunan nilai $V(1) - V(0)$ dimana V adalah fungsi minor dari f pada [0,1].

Pilih fungsi P dan Q dengan definisi

$$P(x) = Q(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x^2}) + 1, & jika\ 0 < x \le 1 \\ 0, & jika\ x = 0 \end{cases},$$

Akan ditunjukkan bahwa $P(x) \in \{U_0^1\}$ dan $Q(x) \in \{V_0^1\}$.

Perhatikan bahwa

$$P'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & jika\ 0 < x \le 1 \\ 0, & jika\ x = 0 \end{cases}$$

Karenanya $\underline{D}P(x) > -\infty$ dan $\underline{D}\,U(x) \ge f(x)$ untuk setiap $x \in [0,1]$. Berdasarkan Definisi 2.8.1, $P(x) \in \{U_0^1\}$.

Kemudian

$$Q'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & jika\ 0 < x \le 1 \\ 0, & jika\ x = 0 \end{cases}$$

Karenanya $\overline{D}\,Q(x) < +\infty$ dan $\overline{D}\,Q(x) \le f(x)$ untuk setiap $x \in [0,1]$. Berdasarkan Definisi 2.8.1, $Q(x) \in \{V_0^1\}$.

Sekarang, dapat dilihat bahwa :

$inf\{U_0^1\} = P_0^1 = 1{,}017 - 0 = 1{,}017$ dan $sup\{V_0^1\} = Q_0^1 = 1{,}017 - 0 = 1{,}017$

Diperoleh $inf\{U_0^1\} = sup\{V_0^1\} = 1{,}017$

Oleh karena itu, $f \in P[0,1]$ dengan $\int_0^1 f(x)dx = 1{,}017$.

5. KESIMPULAN

Berikut adalah kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan :

1. Integral Perron memiliki sifat-sifat dasar integral yaitu sifat kelinearan, keterurutan, dan penambahan selang.
2. Jika suatu fungsi terintegralkan Perron maka fungsi tersebut terintegralkan Denjoy, selain itu jika suatu fungsi terintegralkan Denjoy maka fungsi tersebut terintegralkan P_c. Karena fungsi yang terintegralkan P_c terintegralkan Perron, artinya jika suatu fungsi terintegralkan Denjoy maka fungsi tersebut terintegralkan Perron. Oleh karena itu, suatu fungsi terintegralkan Perron jika dan hanya jika fungsi tersebut terintegralkan Denjoy. Akibatnya jika suatu fungsi terintegral Perron ekuivalen dengan terintegral Denjoy.

6. DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R.G. dan Sherbert, D.R. (2000). *Introduction to Real Analysis (third Ed).* New York: John Wiley & Sons.

Bruckner, A.M., Fleissner, R.J., dan Foran, J. (1986). *The Minimal Integral Which Includes Lebesgue Integrable Functions and Derivatives.* California : Colloquium Mathematicum. Vol. L.

Gordon, R.A. (1994). *Theory of the Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock Integral*. Rhode Island: AMS Publishing Company.

Hamzah, D.A. (2009). *Integral Denjoy dan Keterkaitannya dengan Integral Henstock*. Skripsi pada UPI Bandung.

Hu, S., dan Lakshmikantham. (1987). Some Remarks on Generalized Riemann Integral. Texas : Journal of Mathematical Analysis and Applications.

Malik, S.C., dan Arora, S. (1992). Mathematical Analysis. Delhi : John Wiley & Sons.

McShane, E.J. (1947). *Integration*. London : Princeton University Press

Royden, H.L. (2000). *Real Analysis (second Ed).* London: The Macmillan Company.

Saks, S. (1937). *Theory of the Integral*. New York: Hafner Publishing Company.