KEKONVERGENAN DALAM RUANG LEBESGUE LEMAH DAN EKUIVALENSINYA DENGAN KEKONVERGENAN DALAM RUANG LEBESGUE

Dina Nur Amalina, Encum Sumiaty, Al Azhary Masta
Departemen Pendidikan Matematika FPMIPA UPI
[*)]surel: dinanra@gmail.com

ABSTRAK. Ruang Lebesgue lemah merupakan perluasan dari ruang Lebesgue. Ruang ini adalah ruang quasi-norm dengan dilengkapi suatu quasi-norm. Dalam tulisan ini, penulis memperlihatkan kekonvergenan dalam ruang Lebesgue lemah ekuivalen dengan kekonvergenan dalam ruang Lebesgue. Sebagai ruang yang dilengkapi dengan quasi-norm dan memiliki kriteria Cauchy, ruang Lebesgue dapat disebut sebagai ruang quasi-Banach.

Kata kunci: Ruang Lebesgue, ruang Lebesgue lemah, quasi-norm, ruang quasi-Banach, kekonvergenan.

ABSTRACT. *The weak Lebesgue space is an extension of the Lebesgue space. This space is quasi-norm space equipped with a quasi-norm. In this paper, writer show convergence in weak Lebesgue space is equivalent to convergence in Lebesgue space. As a space furnished with quasi-norm and Cauchy's criteria, the weak Lebesgue space can be referred to as quasi-Banach space.*

Keywords: *Lebesgue space, weak Lebesgue space, quasi-norm, quasi-Banach space, convergence.*

1. PENDAHULUAN

Ruang Lebesgue $L_p(X)$ merupakan ruang fungsi atas himpunan terukur X, pada sebarang nilai $1 \leq p < \infty$ yang dilengkapi dengan norm $\|\cdot\|_{L_p}$ merupakan ruang bernorm, dengan

$$\|f\|_{L_p} := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

untuk sebarang fungsi terukur Lebesgue $f: X \to \mathbb{R}$ anggota $L_p(X)$. Sebagai ruang bernorm, ruang Lebesgue juga memiliki sifat kekonvergenan dan kriteria Cauchy.

Sementara itu, tidak semua fungsi terukur terintegralkan Lebesgue, sehingga fungsi terukur tersebut bukan merupakan anggota dari ruang Lebesgue. Salah satu contohnya terdapat sebuah fungsi terukur pada suatu himpunan terukur $X := (0,1)$ dengan fungsi tersebut didefinisikan sebagai

$$f(x) := \frac{1}{x^{1/p}} \ \forall\, x \in X := (0,1).$$

Di lain pihak, untuk fungsi terukur $f: X \to \mathbb{R}$ pada himpunan terukur X, fungsi distribusi dari f adalah fungsi $d_f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ yang didefinisikan dengan $d_f(\alpha) := \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\})$ dengan sebarang nilai $\alpha > 0$. Melalui pendefinisian dari fungsi distribusi tersebut dapat didefinisikan sebuah ruang baru yang merupakan pengembangan dari ruang Lebesgue yaitu ruang Lebesgue lemah.

Sebagai ruang fungsi, ruang Lebesgue lemah tidak dilengkapi dengan norm, namun dilengkapi dengan quasi-norm. Melalui pendefinisian quasi-norm pada ruang Lebesgue lemah

$$\|f\|_{L_{(p,\infty)}} := \sup_{\alpha > 0} \left\{ \alpha \left(d_f(\alpha) \right)^{\frac{1}{p}} \right\} < \infty$$

untuk sebarang fungsi terukur $f: X \to \mathbb{R}$ anggota $L_{(p,\infty)}(X)$ dan untuk sebarang $0 < p < \infty$ menyebabkan ketaksamaan segitiga pada syarat norm tidak terpenuhi. Berdasarkan quasi-norm yang didefinisikan, ruang Lebesgue lemah dapat ditunjukkan sebagai ruang quasi-norm, sehingga ruang Lebesgue lemah memiliki sifat kekonvergenan dan kriteria Cauchy. Sebagai perluasan ruang yang memuat ruang Lebesgue, kekonvergenan di ruang Lebesgue menyebabkan kekonvergenan di ruang Lebesgue lemah. Castillo & Rafeiro (2016) telah menunjukkan pula bahwa ruang lebesgue lemah merupakan ruang quasi-norm yang lengkap.

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis tertarik untuk mengkaji tentang sifat ruang Lebesgue lemah sebagai perluasan dari ruang Lebesgue, sifat kekonvergenan dalam ruang Lebesgue lemah serta ekuivalensinya dengan kekonvergenan dalam ruang Lebesgue dan ruang Lebesgue lemah merupakan ruang quasi-Banach.

2. KONSEP DASAR RUANG LEBESGUE LEMAH

Berikut akan dibahas pendefinisian norm yang digunakan pada ruang Lebesgue.

Definisi 2.1 (Norm) (Kreyszig, 1978)

Misalkan X ruang vektor atas lapangan real atau kompleks. Sebuah norm pada X adalah fungsi $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ dengan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ dan α sebarang konstanta yang memenuhi kondisi berikut:

1) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$.
2) $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \iff \boldsymbol{x} = 0$.
3) $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$.
4) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

Sebuah ruang vektor yang dilengkapi dengan norm disebut ruang norm vektor.

Misalkan X himpunan terukur, $\mathcal{A}$ σ-aljabar dan μ menyatakan sebuah ukuran. Selanjutnya akan dibahas teori dasar yang digunakan pada ruang Lebesgue.

Definisi 2.2 (Supremum essensial) (Salamon, 2016)

Misalkan $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ruang terukur dan fungsi $f: X \to [0, \infty)$ adalah fungsi terukur. Supremum essensial dari f didefinisikan dengan,

$$ess\,sup\, f \coloneqq inf\ \{c \in [0, \infty): f(x) \leq c \text{ hampir di mana-mana pada } X\}$$

dengan c sebarang konstanta positif.

Definisi 2.3 (Ruang $\boldsymbol{L_\infty(X)}$) (Salamon, 2016)

Misalkan X himpunan terukur. Sebuah fungsi $f: X \to \mathbb{R}$ dikatakan anggota dari ruang $L_\infty(X)$ apabila f fungsi terukur dan

$$\|f\|_\infty \coloneqq ess\,sup|f| < \infty.$$

Definisi 2.4 (Ruang pra-Lebesgue) (Castillo & Rafeiro, 2016)

Misalkan $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ruang terukur dan p bilangan real positif. Fungsi terukur $f: X \to \mathbb{R}$ dikatakan anggota dari Ruang pra-Lebesgue $L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ jika,

$$\int_X |f|^p \, d\mu < \infty.$$

Definisi 2.5 (Castillo & Rafeiro, 2016)

Ruang Lebesgue $L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ adalah ruang bernorm dengan norm,

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p} = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Untuk sebarang $1 \leq p < \infty$.

Definisi 2.6 (Konvergen dalam ruang Lebesgue) (Bartle, 1966)

Suatu barisan fungsi terukur pada $L_p(X)$ (f_n) dikatakan konvergen ke fungsi terukur f di $L_p(X)$, jika $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga,

$$\|f_n - f\|_{L_p} < \varepsilon\ \forall\, n \geq N(\varepsilon).$$

Definisi 2.7 (Kriteria Cauchy di ruang Lebesgue) (Bartle, 1966)

Suatu barisan fungsi terukur pada $L_p(X)$ (f_n) dikatakan barisan Cauchy di $L_p(X)$, jika $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga,

$$\|f_m - f_n\|_{L_p} < \varepsilon\ \forall\, m, n \geq M(\varepsilon).$$

Misalkan $f: X \to \mathbb{R}$, berikut adalah definisi dari fungsi distribusi dari fungsi f.

Definisi 2.8 (Fungsi Distribusi) (Grafakos, 2008)

Fungsi distribusi dari f adalah fungsi $d_f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ yang didefinisikan dengan

$$d_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}).$$

Berikut adalah definisi dari quasi-norm dan ruang quasi-norm lengkap.

Definisi 2.9 (Quasi-Norm) (Kalton, 2003)

Sebuah quasi-norm $\|\cdot\|$ pada ruang vektor X atas lapangan $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$ adalah fungsi $\|\cdot\|: X \to [0, \infty)$ dengan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ dan α sebarang scalar yang memenuhi kondisi berikut:

1) $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \iff \boldsymbol{x} = 0$.
2) $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{x}\|$.
3) Terdapat konstanta $C \geq 1$ sedemikian sehingga,

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq C(\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|).$$

Sebuah ruang vektor yang dilengkapi dengan quasi-norm disebut ruang quasi-norm vektor.

Definisi 2.10 (Ruang Quasi-Norm Lengkap)

Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ suatu ruang quasi-norm. Ruang X dikatakan ruang quasi-norm lengkap atau ruang Banach jika setiap barisan Cauchy di X konvergen di X.

3. METODOLOGI

Penelitian ini merupakan sebuah kajian studi literatur mengenai ruang Lebesgue lemah. Penelitian ini berawal dari ketertarikan penulis terhadap buku berjudul *"An Introductory Course in Lebesgue Spaces"* karya René Erlin Castillo dan Humberto Rafeiro pada tahun 2016, tepatnya pada judul bab "*Weak Lebesgue Spaces*". Berawal dari mempelajari Analisis Fungsional, Teori Ukuran dan Integral Lebesgue, kemudian pada Kapita Selekta Analisis dipelajari fungsi distribusi, ruang Lebesgue, ruang Lebesgue lemah dan sifat kekonvergenan. Lebih lanjut mengenai ruang quasi-norm. Penulis mempelajari lebih lanjut mengenai sifat-sifat kekonvergenan di ruang Lebesgue, ruang Lebesgue lemah, ukuran dan hampir di mana-mana. Selanjutnya mempelajari kaitan-kaitan antara kekonevergenan tersebut melalui buku "*Elements of Integration*" tepatnya pada subbab "*Modes of Convergence*" karya Robert G. Bartle (1966).

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Ruang Lebesgue lemah $L_{(p,\infty)}(X)$ atas himpunan terukur X merupakan himpunan fungsi terukur $f: X \to \mathbb{R}$. Notasi μ menyatakan ukuran Lebesgue dari suatu himpunan terukur. Fungsi distribusi dari fungsi terukur f atas himpunan terukur X dengan sebarang konstanta $\alpha > 0$ yang didefinisikan dengan,

$$d_f(\alpha) := \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}).$$

Definisi dari ruang Lebesgue lemah $L_{(p,\infty)}(X)$ selengkapnya ditunjukkan pada definisi dibawah ini.

Definisi 4.1 (Castillo & Rafeiro, 2016)

Misalkan $0 < p < \infty$, ruang Lebesgue lemah yang dinotasikan dengan $L_{(p,\infty)}(X, \mathcal{A}, \mu)$ didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi terukur f, sedemikian sehingga,

$$\|f\|_{L_{(p,\infty)}} = \|f\|_{(p,\infty)} = \| f \mid L_{(p,\infty)}\| := \sup_{\alpha>0} \left\{\alpha \left(d_f(\alpha)\right)^{\frac{1}{p}}\right\} < \infty.$$

Contoh 4.2

Misalkan didefinisikan suatu himpunan terukur $X \coloneqq \mathbb{R}$, jika fungsi terukur $f: X \to \mathbb{R}$ didefinisikan dengan

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{x}{x-1}, & x \in [-1,0] \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

untuk sebarang $0 < p < \infty$ maka $f \in L_{(p,\infty)}(\mathbb{R})$.

Teorema 4.3 (Castillo & Rafeiro, 2016)

Untuk sebarang $0 < p < \infty$ jika $f \in L_p(X)$ maka $L_p(X) \subset L_{(p,\infty)}(X)$ dengan $\|f\|_{L_{(p,\infty)}} \leq \|f\|_{L_p}$.

Berikut ini merupakan contoh yang memperlihatkan $L_p(X) \neq L_{(p,\infty)}(X)$

Contoh 4.4

Misalkan didefinisikan suatu himpunan terukur $X \coloneqq (0,1)$, jika fungsi terukur $f: X \to \mathbb{R}$ didefinisikan dengan,

$$f(x) \coloneqq \frac{1}{x}$$

maka $f \in L_{(1,\infty)}\big((0,1)\big)$, namun $f \notin L_1\big((0,1)\big)$.

Selanjutnya akan dibahas teorema yang menunjukkan bahwa fungsi $\|\cdot\|_{L_{(p,\infty)}}: X \to [0,\infty)$ yang didefinisikan pada Definisi 4.1 merupakan quasi-norm.

Teorema 4.5

Misalkan $\|\cdot\|_{L_{(p,\infty)}}: X \to [0,\infty)$. Untuk sebarang fungsi terukur $f: X \to \mathbb{R}$ anggota dari $L_{(p,\infty)}(X)$ berlaku, $\|f\|_{L_{(p,\infty)}} = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$.

Teorema 4.6 (Castillo & Rafeiro, 2016)

Jika untuk sebarang fungsi terukur $f, g \in L_{(p,\infty)}(X)$, maka berlaku

1) $\|cf\|_{L_{(p,\infty)}} = |c|\|f\|_{L_{(p,\infty)}}$, untuk sebarang $c \in \mathbb{R}/\{0\}$.
2) $\|f+g\|_{L_{(p,\infty)}} \leq 2\,(\|f\|^p_{L_{(p,\infty)}} + \|g\|^p_{L_{(p,\infty)}})^{\frac{1}{p}}$.

Selanjutnya akan diberikan sebuah contoh yang menunjukkan bahwa $\|\cdot\|_{L_{(p,\infty)}}$ bukan merupakan sebuah norm karena tidak memenuhi syarat ketaksamaan segitiga pada norm.

Contoh 4.7

Misalkan didefinisikan suatu himpunan terukur $X \coloneqq (0,1)$, jika fungsi terukur $f: X \to \mathbb{R}$ dan $g: X \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan

$$f(x) \coloneqq x \text{ dan } g(x) \coloneqq 1 - x$$
dan $f, g \in L_{(1,\infty)}((0,1))$ maka, $\|f + g\|_{L_{(1,\infty)}} > \|f\|_{L_{(1,\infty)}} + \|g\|_{L_{(1,\infty)}}$.

Berikut akan disampaikan definisi konvergen di ruang Lebesgue lemah $L_{(p,\infty)}(X)$. Karena ruang Lebesgue lemah $L_{(p,\infty)}(X)$ merupakan ruang quasi-norm sehingga definisi konvergen di ruang Lebesgue lemah $L_{(p,\infty)}(X)$ dapat menggunakan sifat kekonvergenan dalam ruang quasi-norm.

Definisi 4.8

Misalkan X himpunan terukur. Suatu barisan fungsi terukur pada $L_{(p,\infty)}(X)$ (f_n) dikatakan konvergen ke $f \in L_{(p,\infty)}(X)$ dengan $f \in L_{(p,\infty)}(X)$ yang dinotasikan dengan $f_n \longrightarrow f$, jika $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga,

$$\|f_n - f\|_{L_{(p,\infty)}} < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq N(\varepsilon).$$

Teorema 4.9 (Castillo & Rafeiro, 2016)

Misalkan $0 < p < \infty$, barisan fungsi terukur (f_n) dan f merupakan anggota dari $L_{(p,\infty)}(X)$. Jika $f_n, f \in L_p(X)$ serta $f_n \longrightarrow f$ di $L_p(X)$, maka $f_n \longrightarrow f$ di $L_{(p,\infty)}(X)$.

Sebelum menunjukkan ekuivalensi kekonvergenan dalam ruang Lebesgue lemah $L_{(p,\infty)}(X)$ dengan kekonvergenan dalam ruang Lebesgue $L_p(X)$ akan dibahas definisi dan teorema dari kekonvergenan di ukuran dan kekonvergenan hampir di mana-mana yang berkaitan dengan kekonvergenan dalam ruang Lebesgue lemah $L_{(p,\infty)}(X)$.

Definisi 4.10 (Hewitt & Stromberg, 1965)

Misalkan $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ruang terukur, (f_n) dan f fungsi terukur pada himpunan terukur X. Suatu barisan (f_n) dikatakan konvergen di ukuran ke fungsi f yang dinotasikan dengan $f_n \xrightarrow{\mu} f$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga,

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq N(\varepsilon).$$

Teorema 4.11 (Castillo & Rafeiro, 2016)

Misalkan $0 < p < \infty$, barisan fungsi terukur (f_n) dan fungsi terukur f merupakan anggota dari $L_{(p,\infty)}(X)$. Jika $f_n \longrightarrow f$ di $L_{(p,\infty)}(X)$ maka $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Berikut ini adalah contoh kasus yang menunjukkan kekonvergenan di ukuran tidak menjadi syarat cukup untuk kekonvergenan dalam ruang Lebesgue lemah.

Contoh 4.12

Misalkan didefinisikan suatu himpunan terukur $X \coloneqq \mathbb{R}$, jika barisan fungsi terukur (f_n) didefinisikan dengan

$$f_n := \begin{cases} n^{\frac{1}{p}}, & x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

dan fungsi terukur f didefinisikan dengan $f(x) = 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, maka $f_n \xrightarrow{\mu} f$ namun $f_n \nrightarrow f$ di $L_{(p,\infty)}(\mathbb{R})$.

Definisi 4.13 (Bartle, 1966)

Barisan fungsi (f_n) konvergen hampir di mana-mana ke f yang dinotasikan dengan $f_n \longrightarrow f\ \mu - a.e$, jika terdapat himpunan bagian E dari himpunan terukur X dengan $\mu(E) = 0$ sedemikian sehingga $\forall\ \varepsilon > 0$ dan $x \in X - E$ terdapat $N(\varepsilon)$ sedemikian sehingga $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall\ n \geq N(\varepsilon)$.

Teorema 4.14 (Kufner, dkk., 1977)

Jika $f_n \longrightarrow f\ \mu - a.e$, maka $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Berikut ini adalah contoh kasus yang menunjukkan kekonvergenan di ukuran tidak menjadi syarat cukup untuk kekonvergenan hampir di mana-mana.

Contoh 4.15

Misalkan didefinisikan suatu himpunan terukur $X \coloneqq \mathbb{R}$, jika barisan fungsi terukur (f_n) didefinisikan dengan

$$f_n := \begin{cases} n + \frac{n}{2}, & x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

dan fungsi terukur f didefinisikan dengan $f(x) = 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, maka $f_n \xrightarrow{\mu} f$ namun $f_n \nrightarrow f\ \mu - a.e$.

Teorema 4.16 (Bartle, 1966)

Misalkan barisan fungsi terukur (f_n) di $L_p(X)$ dengan $f_n \longrightarrow f\ \mu - a.e$. Jika terdapat $g \in L_p(X)$ sedemikian sehingga $|f_n(x)| \leq g(x)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$,maka $f \in L_p(X)$ dan $f_n \longrightarrow f$ di $L_p(X)$.

Teorema 4.17

Misalkan $0 < p < \infty$, barisan fungsi terukur (f_n) dan fungsi terukur f merupakan anggota dari $L_{(p,\infty)}(X)$. Pada himpunan terukur X, $f_n \longrightarrow f$ di $L_{(p,\infty)}(X)$ jika dan hanya jika $f_n \longrightarrow f\ \mu - a.e$.

Teorema 4.18 (Bartle, 1966)

Jika $f_n \xrightarrow{\mu} f$ barisan fungsi terukur (f_n) di $L_p(X)$ dan $g \in L_p(X)$ sedemikian sehingga $|f_n(x)| \leq g(x)\ \mu - a.e$, maka $f \in L_p(X)$ dan $f_n \longrightarrow f$ di $L_p(X)$.

Berdasarkan kaitan kekonvergenan dalam ruang Lebesgue lemah $L_{(p,\infty)}(X)$ dengan kekonvergenan di ukuran dan kekonvergenan hampir di mana-mana, diperoleh teorema yang menunjukkan bahwa kekonvergenan dalam ruang Lebesgue lemah $L_{(p,\infty)}(X)$ merupakan syarat cukup untuk kekonvergenan dalam ruang Lebesgue $L_p(X)$. Namun terdapat kondisi yang harus dipenuhi yaitu barisan fungsi terukur (f_n) harus didominasi oleh sebuah fungsi terukur pada ruang Lebesgue $L_p(X)$

Teorema 4.19

Misalkan barisan fungsi terukur $(f_n) \in L_p(X)$. Jika $f_n \longrightarrow f$ di $L_{(p,\infty)}(X)$ dan $g \in L_p(X)$ sedemikian sehingga $|f_n(x)| \leq g(x)\ \mu - a.e$, maka

$$f \in L_p(X) \text{ dan } f_n \longrightarrow f \text{ di } L_p(X).$$

Bukti: Akan ditunjukkan $f \in L_p(X)$ dan $f_n \longrightarrow f$ di $L_p(X)$.

Misalkan $f_n \longrightarrow f$ di $L_{(p,\infty)}(X)$, berdasarkan Teorema 4.11 maka $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Karena $g \in L_p(X)$ sedemikian sehingga $|f_n(x)| \leq g(x)\ \mu - a.e$, sehingga berdasarkan Teorema 4.18 terbukti $f \in L_p(X)$ dan $f_n \longrightarrow f$ di $L_p(X)$. ■

Teorema 4.20

Misalkan barisan fungsi terukur (f_n) di $L_p(X)$. Jika $f_n \longrightarrow f$ di $L_{(p,\infty)}(X)$ dan terdapat $g \in L_p(X)$ sedemikian sehingga

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}, x \in X$$

maka $f \in L_p(X)$ dan $f_n \longrightarrow f$ di $L_p(X)$.

Bukti: Akan ditunjukkan $f \in L_p(X)$ dan $f_n \longrightarrow f$ di $L_p(X)$.

Misalkan $f_n \longrightarrow f$ di $L_{(p,\infty)}(X)$, berdasarkan Teorema 4.17 maka $f_n \longrightarrow f$ $\mu - a.e$. Karena $g \in L_p(X)$ sedemikian sehingga $|f_n(x)| \leq g(x)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, x ∈ X, sehingga berdasarkan Teorema 4.16 terbukti $f \in L_p(X)$ dan $f_n \longrightarrow f$ di $L_p(X)$. ■

Selanjutnya berdasarkan quasi-norm yang didefinisikan pada Definisi 4.1 akan ditunjukkan ruang Lebesgue lemah $L_{(p,\infty)}(X)$ merupakan ruang quasi-Banach, melalui kriteria Cauchy yang berlaku di dalamnya.

Definisi 4.21

Misalkan X himpunan terukur. Suatu barisan fungsi terukur pada $L_{(p,\infty)}(X)$ yang dinotasikan dengan (f_n) dikatakan barisan Cauchy di $L_{(p,\infty)}(X)$, jika $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga,

$$\|f_m - f_n\|_{L_{(p,\infty)}} < \varepsilon\ \forall\ m, n \geq N(\varepsilon) \text{ dengan } m, n \in \mathbb{N}.$$

Definisi 4.22 (Bartle, 1966)

Barisan fungsi (f_n) dikatakan barisan Cauchy di ukuran jika $\forall\ \varepsilon > 0$ terdapat $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) < \varepsilon\ \forall\ m, n \geq N(\varepsilon).$$

Teorema 4.23 (Castillo & Rafeiro, 2016)

Untuk setiap $0 < p < \infty$, Ruang Lebesgue lemah $L_{(p,\infty)}(X)$ atas himpunan terukur X, yang dilengkapi dengan quasi-norm $\|\cdot\|_{L_{(p,\infty)}}$ maka $L_{(p,\infty)}(X)$ merupakan ruang quasi-norm lengkap.

5. KESIMPULAN

Ruang Lebesgue lemah $L_{(p,\infty)}(X)$ memuat ruang Lebesgue $L_p(X)$. Di lain pihak, fungsi $\|\cdot\|_{L_{(p,\infty)}}$ merupakan sebuah quasi-norm karena pada syarat ketaksamaan segitiga terdapat konstanta $C = 2$. Oleh karena itu, ruang Lebesgue lemah $L_{(p,\infty)}(X)$ merupakan ruang quasi-norm, dengan begitu berlaku sifat kekonvergenan dalam ruang Lebesgue lemah $L_{(p,\infty)}(X)$ sama seperti sifat kekonvergenan dalam ruang quasi-norm. Di lain pihak, kekonvergenan dalam ruang Lebesgue lemah $L_{(p,\infty)}(X)$ mengakibatkan kekonvergenan di ukuran, kekonvergenan hampir di mana-mana. Selain itu, kekonvergenan di ruang Lebesgue $L_p(X)$ dan kekonvergenan di ruang Lebesgue lemah $L_{(p,\infty)}(X)$ berlaku ekuivalen, namun terdapat kondisi yang harus dipenuhi yaitu barisan fungsi terukur (f_n) tersebut harus didominasi oleh fungsi terukur yang berada di $L_p(X)$. Ruang Lebesgue lemah $L_{(p,\infty)}(X)$ merupakan ruang quasi-Banach.

6. DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R. G. (1966). *The Elements of Integration.* Champaign-Urbana, Illinois: John Wiley & Sons.

Castillo, R. E., & Rafeiro, H. (2016). *An Introductory Course in Lebesgue Spaces.* Bogotá: Springer.

Grafakos, L. (2008). *Classical Fourier Analysis (Second Edition).* Columbia:

Springer.
Hewitt, E., & Stromberg, K. (1965). *Real and Abstract Analysis.* Heidelberg: Springer-Verlag.
Kalton, N. (2003). Quasi-Banach Spaces. *Hanbook of the Geometry of Banach volume 2*, 1099-1130.
Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications.* New York: John Wiley and Sons.
Salamon, D. A. (2016). *Measure and Integration.* Zürich: ETH Zürich.