

Pemodelan Matematika untuk Aliran Darah dengan Tekanan yang Berubah Secara Periodik

M. Rizqi Ramadhan*, Kartika Yulianti dan Cece Kustiawan

Departemen Pendidikan Matematika

Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Pendidikan Indonesia

*Surel: Rizqiramadhan69@gmail.com

ABSTRAK. Darah mengalir setiap detik di dalam seluruh tubuh. Aliran darah yang membawa zat-zat yang diperlukan untuk aktivitas organ-organ tubuh, seperti oksigen dan zat-zat nutrisi lainnya. Aliran darah yang terjadi akibat dari perubahan tekanan darah secara periodik menyebabkan kecepatan aliran darah berubah-ubah di setiap waktu. Tujuan penelitian ini membuat model matematika untuk kecepatan aliran darah dengan tekanan yang berubah. Model tersebut dibangun dari persamaan Navier Stokes untuk kecepatan aliran fluida satu arah dengan koordinat polar silinder dan persamaan kontinuitas. Pencarian solusi analitik dari model dilakukan dengan metode pemisahan variable. Berdasarkan model tersebut diperoleh profil kecepatan aliran darah dan faktor-faktor yang mempengaruhinya yaitu jari-jari pembuluh darah, amplitudo gradien tekanan darah, frekuensi gradien tekanan darah dan viskositas kinematik darah.

Kata Kunci: Kecepatan Aliran Darah, Perubahan Tekanan Periodik, Pemisahan Variabel, Persamaan Navier Stokes, Persamaan Kontinuitas.

Mathematical Model for Blood Flow with Periodic Gradient Pressure

ABSTRACT. *Blood flows every second throughout the body. Blood flow carries substances needed for the activity of body organs, such as oxygen and other nutrients. Blood flow that occurs as a result of changes in blood pressure periodically causes the velocity of blood flow to change at any time. The purpose of this study is to construct a mathematical model for blood-flow velocity with periodic gradient pressure. The model is derived from the Navier Stokes equation and continuity equations in polar cylindrical coordinates. A solution of the model is obtained by the variable separation method. Based on the model, the velocity profile of the blood flow is obtained. The factors that influence it are the radius of the blood vessel, the amplitude of the blood pressure gradient, frequency gradients of blood pressure and kinematic viscosity of blood.*

Keywords: *Velocity of Blood Flow, Periodic Pressure Gradient, Variable Separation Method, Navier Stokes Equation, Continuity Equation.*

1. PENDAHULUAN

Darah adalah cairan yang terdapat pada semua makhluk hidup (kecuali tumbuhan) tingkat tinggi yang berfungsi mengirimkan zat-zat dan oksigen yang dibutuhkan oleh jaringan tubuh (Wahyu, 2009). Dalam proses sirkulasi darah terdapat organ pembuluh darah yang menjadi media yang dilalui oleh darah.

Pada sistem sirkulasi darah, jantung berdetak terdapat proses perpindahan darah. Aliran darah yang terjadi akibat dari perubahan tekanan darah secara periodik menyebabkan kecepatan aliran darah berubah. Proses aliran darah terdapat beberapa kejadian yang sering dijumpai yaitu kecepatan aliran darah sangat besar atau kecepatan aliran darah sangat kecil akibat dari perubahan tekanan yang terjadi. Hal tersebut dapat menghambat aktivitas organ lain sehingga dapat menimbulkan beberapa penyakit, seperti stroke, hipertensi, hipotensi, dan penyakit jantung coroner.

Terdapat banyak penelitian terdahulu mengenai model matematika untuk kecepatan aliran darah. Salman et al. (2018) menyusun model matematika untuk kecepatan darah dengan perubahan tekanan konstan. Ia menyatakan kecepatan aliran darah dipengaruhi oleh faktor-faktor antara lain nilai tekanan darah, jari-jari pembuluh darah, dan kekentalan darah. (Fibich et al., 1993) menganalisa secara teori aliran *coronary capillary* berdasarkan mekanika kontinu. (Chernyavsky et al., 2010) menyajikan model matematika untuk aliran darah menggunakan hukum Darcy dan transportasi advectif. Selain itu, (Rahman & Haque, 2012) menyatakan ketika darah mengalir melalui pembuluh, tekanan terdeteksi di dinding pembuluh darah. Aliran darah terutama bergantung pada laju aliran, ukuran pembuluh, dan pada gradien tekanan. Berbeda dengan penelitian tersebut, pada penelitian ini model matematika diterapkan dalam menghitung kecepatan aliran darah dengan tekanan berubah secara periodik berguna untuk mengetahui besaran kecepatan aliran darah dalam tubuh dan pengaruh perubahan tekanan secara periodik terhadap kecepatan aliran darah.

Persamaan yang digunakan pada penelitian ini adalah persamaan kontinuitas, dan Persamaan Navier Stokes yang menggambarkan tentang dinamika aliran fluida. Berdasarkan dari solusi penyelesaian model kecepatan periodik aliran darah, akan ditentukan faktor-faktor apa saja yang mempengaruhi kecepatan aliran darah.

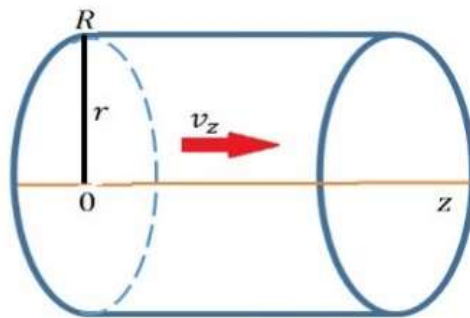
2. METODE PENELITIAN

Langkah-langkah dalam penelitian ini meliputi membangun model dasar, mencari solusi untuk model, dan menarik kesimpulan. Kemudian hasil

kesimpulan divalidasi dengan memeriksa kesesuaiannya dengan hasil penelitian lain.

Merujuk pada (Leal, 2007), berikut ini dipaparkan model kecepatan aliran darah pada domain berbentuk tabung (diilustrasikan pada Gambar 1). Pada penyusunan model matematika ini digunakan beberapa asumsi, yaitu

1. Darah bersifat fluida Newtonian,
2. Darah bersifat fluida tak mampat atau *incompressible*,
3. Darah tidak mengalami perubahan massa jenis dalam tabung,
4. Pembuluh darah berukuran pendek dan tidak mengalami perubahan bentuk,
5. Arah aliran darah yang dikaji pada satu dimensi pada sumbu z ,
6. Tekanan darah berubah secara periodik,
7. Tidak ada hambatan di dalam pembuluh darah,
8. Bahan-bahan penyusun darah bersifat seragam,
9. Aliran bersifat simetri terhadap sumbu z .



Gambar 1. Domain aliran darah

Misalkan vektor kecepatan untuk fluida dalam koordinat silinder yaitu $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$. Berdasarkan asumsi arah aliran darah hanya satu dimensi, maka digunakan persamaan aliran fluida Navier Stokes dalam arah sumbu z , yaitu (Basuki & Susanto, 2019):

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ & = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \\ & + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

dengan $v_z(r, z, t)$ adalah kecepatan aliran fluida, p adalah tekanan fluida, ρ adalah massa jenis fluida, g_z adalah gravitasi berarah pada sumbu simetri aksial, dan μ adalah konstanta kekentalan fluida. Kemudian digunakan pula persamaan kontinuitas dalam koordinat polar silinder, yaitu (Tiwow & Malago, 2015), (Baranyi, 2003) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

Karena diasumsikan $\mathbf{v} = (0, 0, v_z)$, maka persamaan kontinuitas (2) menjadi

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

Diasumsikan darah yang mengalir dalam pembuluh tidak dipengaruhi oleh nilai gravitasi karena massa fluida relatif kecil sehingga nilai ρg_z pada Persamaan (1) diabaikan. Karena bersifat simetri terhadap sumbu z maka parameter arah tangensial θ dapat diabaikan. Diasumsikan tekanan berubah secara periodik. Oleh karena itu, $-\frac{\partial p}{\partial z}$ dapat dinyatakan oleh $G = G_0(1 + \varepsilon \sin \omega t)$ (Chernyavsky et al., 2010), dimana G_0 , ε , dan ω berturut-turut adalah nilai rata-rata tekanan terhadap waktu, amplitudo, dan frekuensi. Persamaan (3) dan asumsi-asumsi yang digunakan tersebut disubstitusikan ke dalam Persamaan (1), maka diperoleh

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} \right) = G_0(1 + \varepsilon \sin \omega t) + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right). \quad (4)$$

Persamaan (4) adalah persamaan untuk kecepatan aliran darah dalam satu arah pada sumbu z . Pada penelitian ini, nilai awal dan syarat batas yang berlaku untuk persamaan (4) yaitu:

1. $v_z = 0$ pada $r = R$ untuk semua t (5)
2. v_z bernilai terbatas pada $r = 0$ untuk semua t
3. $v_z = 0$ saat $t = 0$ untuk semua r

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Solusi Analitik Model Aliran Darah

Langkah awal yang dilakukan untuk mendapatkan solusi dari persamaan (4) sampai (5) adalah melakukan proses non dimensional (Chernyavsky et al., 2010). Variabel-variabel tak berdimensi didefinisikan sebagai

$$\bar{r} = \frac{r}{R}, \bar{v}_z = \frac{v_z}{v_c}, \text{ dan } \hat{t} = \frac{t}{T}. \quad (6)$$

Dengan mensubstitusi (6) ke dalam persamaan (4), diperoleh

$$\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \hat{t}}\right) = \frac{G_0 T}{v_c \rho} (1 + \varepsilon \sin \omega \hat{t} T) + \mu \frac{T}{R^2 \rho} \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{r}} \right) \right). \quad (7)$$

Setelah melalui perhitungan diambil $v_c = \frac{G_0 R^2}{\mu}$ dan $T = \frac{R^2}{\nu}$ yang merupakan waktu difusi momentum tabung dengan $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ adalah viskositas kinematik. Persamaan (7) dapat ditulis menjadi

$$\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \hat{t}} = 1 + \varepsilon \sin R_\omega \hat{t} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{r}} \right), \quad (8)$$

dimana $R_\omega = \frac{\omega R^2}{\nu}$. Nilai awal dan syarat batas untuk persamaan 8 dalam bentuk tidak berdimensi adalah:

1. $\bar{v}_z = \frac{v_z}{v_c} = \frac{0}{v_c} = 0$ pada $\bar{r} = \frac{r}{R} = \frac{R}{R} = 1$ untuk semua nilai \hat{t} (9)
2. \bar{v}_z bernilai terbatas pada $\bar{r} = \frac{r}{R} = \frac{0}{R} = 0$ untuk semua nilai \hat{t}
3. $\bar{v}_z = \frac{v_z}{v_c} = \frac{0}{v_c} = 0$ saat $\hat{t} = \frac{t}{T} = \frac{0}{T} = 0$ untuk semua nilai \bar{r}

Chernyavsky et al. (2010) dinyatakan sebagai penjumlahan dua buah fungsi, yaitu

$$\bar{v}_z = v_z^{(0)} + \varepsilon v_z^{(1)}, \quad (10)$$

dimana $v_z^{(0)}$ adalah fungsi yang tidak bergantung pada waktu \hat{t} sehingga $\frac{\partial v_z^{(0)}}{\partial \hat{t}} = 0$ dan $v_z^{(1)}$ adalah fungsi yang bergantung pada jari-jari \bar{r} dan waktu \hat{t} dengan memuat suku periodik.

Dengan mensubstitusikan persamaan (10) ke dalam persamaan (8), diperoleh hasil sebagai berikut

$$0 + \varepsilon \frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial \hat{t}} = 1 + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial v_z^{(0)}}{\partial \bar{r}} \right) + \varepsilon \sin R_\omega \hat{t} + \varepsilon \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial \bar{r}} \right). \quad (11)$$

Persamaan (11) dapat dikelompokkan menjadi dua bagian, yaitu bagian pertama:

$$1 + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial v_z^{(0)}}{\partial \bar{r}} \right) = 0. \quad (12)$$

Nilai awal dan syarat batas untuk persamaan (12) adalah

1. $v_z^{(0)} = 0$ pada $\bar{r} = 1$ untuk semua \hat{t} (13)
2. $v_z^{(0)}$ bernilai terbatas pada $\bar{r} = 0$ untuk semua nilai \hat{t}

Karena tidak bergantung pada waktu, persamaan (12) dikatakan merupakan kondisi aliran yang setimbang. Selanjutnya didapatkan penyelesaian dari persamaan (12) sebagai berikut.

$$v_z^{(0)} = \frac{1}{4}(1 - \bar{r}^2). \tag{14}$$

Kemudian bagian kedua yang bergantung pada waktu \hat{t} , dapat ditulis:

$$\frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial \hat{t}} = \sin R_\omega \hat{t} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial \bar{r}} \right). \tag{15}$$

Nilai awal dan syarat batas untuk persamaan (15) adalah

1. $v_z^{(1)} = 0$ pada $\bar{r} = 1$ untuk semua \hat{t} (16)
2. $v_z^{(1)}$ bernilai terbatas pada $\bar{r} = 0$ untuk semua nilai \hat{t}
3. $v_z^{(1)} = 0$ saat $\hat{t} = 0$ untuk semua nilai \bar{r}

Solusi analitik untuk persamaan (15) didasari oleh persamaan eksponensial. Sehingga, digunakan pendekatan yang dapat memenuhi hubungan antara $v_z^{(1)}$ dan gradien tekanan $\sin R_\omega \hat{t}$ yang berlaku untuk semua nilai R_ω . Oleh karena itu digunakan bidang kecepatan kompleks \hat{v}_z yaitu:

$$\frac{\partial \hat{v}_z}{\partial \hat{t}} = e^{iR_\omega \hat{t}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \hat{v}_z}{\partial \bar{r}} \right) \tag{17}$$

dimana \hat{v}_z merupakan kecepatan pada arah z dalam bidang kompleks. Nilai awal dan syarat batas untuk persamaan (17) adalah sebagai berikut

1. $\hat{v}_z = 0$ pada $\bar{r} = 1$ untuk semua \hat{t} (18)
2. \hat{v}_z bernilai terbatas pada $\bar{r} = 0$ untuk semua nilai \hat{t}
3. $\hat{v}_z = 0$ saat $\hat{t} = 0$ untuk semua nilai \bar{r}

Karena \hat{v}_z adalah bilangan kompleks, maka \hat{v}_z dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\hat{v}_z = Re(\hat{v}_z) + Im(\hat{v}_z). \tag{19}$$

Kemudian Persamaan (19) disubstitusikan ke Persamaan (17) sehingga diperoleh:

$$v_z^{(1)} = Im(\hat{v}_z). \tag{20}$$

Dari persamaan (17) dan dua kondisi batas (18), dimisalkan solusi penyelesaian \hat{v}_z adalah

$$\hat{v}_z(\bar{r}, \hat{t}) = e^{iR_\omega \hat{t}} H(\bar{r}). \tag{21}$$

Persamaan (21) disubstitusikan ke dalam Persamaan (17) diperoleh

$$\frac{d^2 H}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{dH}{d\bar{r}} - i R_\omega H = -1. \tag{22}$$

Dengan nilai awal dan syarat batas sebagai berikut

$$1. H(\bar{r}) = 0 \text{ pada } \bar{r} = 1 \text{ untuk semua } \hat{t} \quad (23)$$

$$2. H(\bar{r}) \text{ bernilai terbatas pada } \bar{r} = 0 \text{ untuk semua nilai } \hat{t}$$

Solusi Persamaan (22) adalah

$$H = -\frac{i}{R_\omega} + AJ_0 \left[\left(\frac{R_\omega}{i} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{r} \right] + BY_0 \left[\left(\frac{R_\omega}{i} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{r} \right], \quad (24)$$

dimana A dan B adalah kontanta, J_0 dan Y_0 adalah fungsi Bessel jenis pertama dan fungsi Bessel jenis kedua dengan order nol.

Karena $Y_0(\bar{r}) \rightarrow -\infty$, jika $\bar{r} \rightarrow 0$, haruslah $B = 0$. Untuk mencari nilai A , digunakan kondisi $H(\bar{r} = 1) = 0$, sehingga diperoleh

$$A = \frac{i}{R_\omega J_0 \sqrt{\frac{R_\omega}{i}}}. \quad (25)$$

Kemudian Persamaan (25) disubstitusikan ke dalam Persamaan (24), sehingga didapatkan

$$H = -\frac{i}{R_\omega} \left[1 - \frac{J_0 \left(\sqrt{\frac{R_\omega}{i}} \bar{r} \right)}{J_0 \sqrt{\frac{R_\omega}{i}}} \right]. \quad (26)$$

Persamaan (26) disubstitusikan ke persamaan (21), sehingga diperoleh

$$\hat{v}_z = e^{iR_\omega \hat{t}} \left[-\frac{i}{R_\omega} \right] \left\{ 1 - \frac{J_0 \left(\sqrt{\frac{R_\omega}{i}} \bar{r} \right)}{J_0 \sqrt{\frac{R_\omega}{i}}} \right\}. \quad (27)$$

Diperoleh kecepatan $v_z^{(1)}$ yaitu

$$v_z^{(1)\infty} = Im \left[-\frac{ie^{iR_\omega \hat{t}}}{R_\omega} \left\{ 1 - \frac{J_0 \left(\sqrt{\frac{R_\omega}{i}} \bar{r} \right)}{J_0 \sqrt{\frac{R_\omega}{i}}} \right\} \right] \quad (28)$$

Tanda ∞ digunakan untuk menyatakan bahwa $v_z^{(1)}$ bergerak secara periodik untuk waktu \hat{t} yang panjang. Persamaan (28) adalah solusi eksak umum untuk $v_z^{(1)\infty}$, yang valid untuk semua nilai dari R_ω .

Jika dikembalikan ke bentuk awal solusi umum \bar{v}_z^∞ yaitu:

$$\bar{v}_z^\infty = v_z^{(0)} + \varepsilon v_z^{(1)\infty},$$

Maka diperoleh penyelesaian untuk model kecepatan aliran darah di dalam tabung dengan perubahan tekanan yang bersifat periodik, yang berlaku untuk semua nilai R_ω :

$$\bar{v}_z^\infty = \frac{1}{4}(1 - \bar{r}^2) + \varepsilon \left(\operatorname{Im} \left[-\frac{i e^{i R_\omega \hat{t}}}{R_\omega} \left\{ 1 - \frac{J_0 \left(\sqrt{\frac{R_\omega}{i}} \bar{r} \right)}{J_0 \left(\sqrt{\frac{R_\omega}{i}} \right)} \right\} \right] \right). \quad (29)$$

Untuk kasus R_ω bernilai kecil, dengan menggunakan ekspansi z dari $J_0(z)$, solusi (29) dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$v_z^{(1)\infty} = \frac{1}{4}(1 - \bar{r}^2) \sin R_\omega \hat{t} - \frac{1}{16}(R_\omega) \left(\frac{3}{4} - \bar{r}^2 + \frac{\bar{r}^4}{4} \right) \cos R_\omega \hat{t} + O(R_\omega^2), \quad (30)$$

dengan galat estimasi $O(R_\omega^2)$. Berdasarkan Persamaan (10), diperoleh solusi dari model matematika (8) - (9) untuk R_ω bernilai kecil.

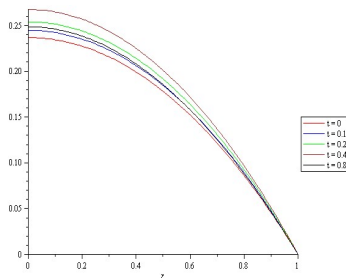
$$\bar{v}_z^\infty = \frac{1}{4}(1 - \bar{r}^2)(1 + \varepsilon \sin R_\omega \hat{t}) - \varepsilon \frac{1}{16}(R_\omega) \left(\frac{3}{4} - \bar{r}^2 + \frac{\bar{r}^4}{4} \right) \cos R_\omega \hat{t} + O(R_\omega^2), \quad (31)$$

3.2 Grafik Kecepatan Aliran Darah dan Interpretasi

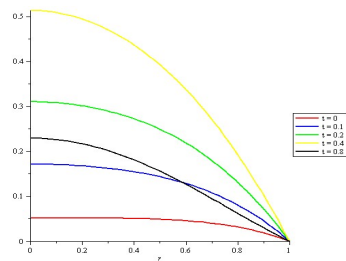
Model

Profil kecepatan aliran fluida dianalisis melalui grafik dari Persamaan (29) untuk nilai $\bar{r} \in [0,1]$ dan nilai \hat{t} tertentu. Pada persamaan (29), terdapat dua buah parameter yang berpengaruh terhadap kecepatan aliran darah di dalam tabung, yaitu ε dan R_ω .

3.2.1 Pengaruh Nilai ε



Gambar 2. Grafik $\bar{v}_z^\infty(\bar{r}, \hat{t})$ untuk $R_\omega = 5; \varepsilon = 0,1; \bar{r} \in [0,1]$ dan $\hat{t} = 0; 0,1; 0,2; 0,4; 0,8$

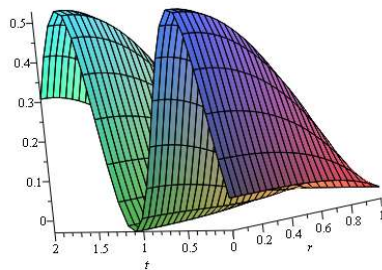


Gambar 3. Grafik $\bar{v}_z^\infty(\bar{r}, \hat{t})$ untuk $R_\omega = 5; \varepsilon = 1,5, \bar{r} \in [0,1]$ dan $\hat{t} = 0; 0,1; 0,2; 0,4; 0,8$

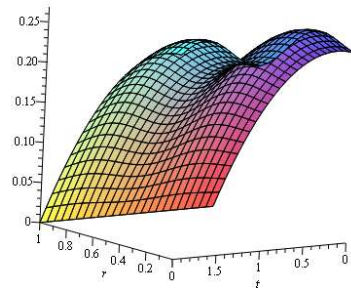
Berdasarkan Gambar 2 dan 3, terlihat bahwa nilai \bar{v}_z^∞ mempunyai nilai maksimum pada $\bar{r} = 0$ dan terjadi perubahan nilai \bar{v}_z^∞ secara periodik untuk nilai \hat{t} . Setiap nilai \bar{v}_z^∞ akan semakin mengecil dan bernilai nol pada $\bar{r} = 1$. Nilai ε berpengaruh pada besaran nilai maksimum dan minimum \bar{v}_z^∞ dan rentang nilai \bar{v}_z^∞ terhadap nilai \hat{t} secara signifikan. Semakin besar

nilai ε , semakin besar pula nilai maksimum \bar{v}_z^∞ dan semakin tinggi pula nilai selisih maksimum dan minimum.

Untuk memperjelas pengaruh ε nilai \bar{v}_z^∞ dapat dilihat dengan grafik 3D dengan nilai $\hat{t} = 0 \dots 2$ diperoleh perubahan kecepatan aliran darah yang digambarkan pada Gambar 4 dan Gambar 5. Secara fisis semakin besar nilai ε maka perubahan kecepatan aliran darah akan semakin besar.

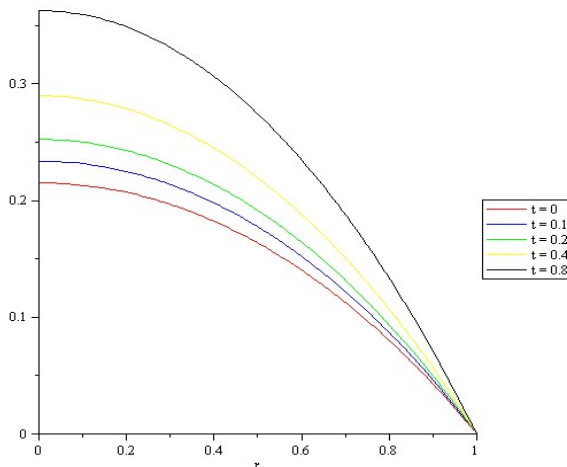


Gambar 4. Grafik 3D $\bar{v}_z^\infty(\bar{r}, \hat{t})$ untuk $R_\omega = 5$; $\varepsilon = 0,1$; $\bar{r} \in [0,1]$ dan $\hat{t} = 0 \dots 2$



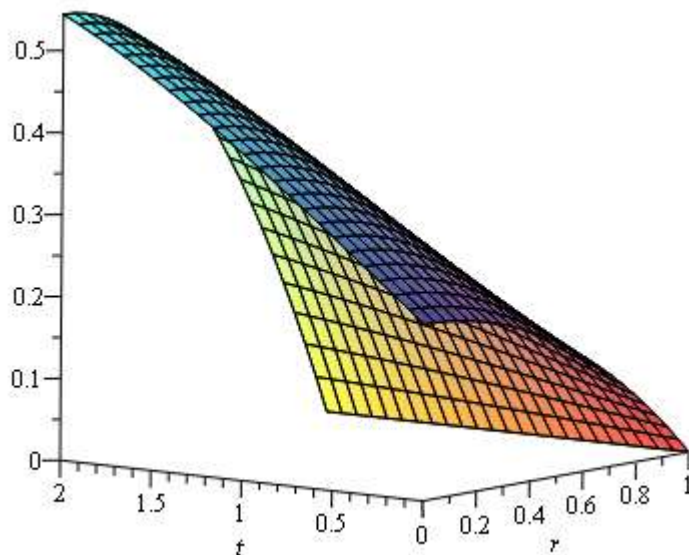
Gambar 5. Grafik 3D $\bar{v}_z^\infty(\bar{r}, \hat{t})$ untuk $R_\omega = 5$; $\varepsilon = 1,5$; $\bar{r} \in [0,1]$ dan $\hat{t} = 0 \dots 2$

3.2.2 Pengaruh Nilai R_ω



Gambar 6 Grafik $\bar{v}_z^\infty(\bar{r}, \hat{t})$ untuk $R_\omega = 0,5$; $\varepsilon = 1,5$; $\bar{r} \in [0,1]$ dan $\hat{t} = 0; 0,1; 0,2; 0,4; 0,8$

Untuk melihat pengaruh dari nilai R_ω , Gambar 3 akan dibandingkan dengan Gambar 6. Secara 3D, Gambar 7 dibandingkan dengan Gambar 5. Berdasarkan gambar-gambar tersebut, nilai R_ω berpengaruh pada nilai periode dari perubahan \bar{v}_z^∞ . Semakin besar nilai R_ω , semakin kecil nilai periode \bar{v}_z^∞ . Dengan kata lain, pada nilai R_ω yang kecil, perubahan kecepatan aliran darah \bar{v}_z^∞ bersifat lambat (periode besar), sedangkan pada nilai R_ω yang besar, pada rentang waktu yang sama, perubahan kecepatan aliran darah \bar{v}_z^∞ bersifat cepat. Secara fisis semakin besar nilai R_ω maka semakin besar nilai jari jari pembuluh darah dan frekuensi gradien tekanan, semakin kecil nilai viskositas kinematik yang menyebabkan perubahan kecepatan aliran darah semakin besar.



Gambar 7 Grafik 3D $\bar{v}_z^\infty(\bar{r}, \hat{t})$ untuk $R_\omega = 0,5$; $\varepsilon = 1,5$; $\bar{r} \in [0,1]$ dan $\hat{t} = 0 \dots 2$

Hasil ini sesuai dengan penelitian Womersley pada (Womersley, 1955) yang menyatakan bahwa laju aliran fluida sebagai fungsi hubungan gradien tekanan-waktu, frekuensi nadi, sifat fluida, dan jari-jari tabung, dan kecepatan fluida sebagai fungsi dari jumlah di atas dan posisi radial dalam tabung.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan model yang dikonstruksi dan solusi penyelesaian dari model diperoleh faktor-faktor yang mempengaruhi kecepatan aliran darah dengan tekanan yang berubah secara periodik antara lain: amplitudo gradien tekanan ε dan periode gradien tekanan R_ω . Semakin besar nilai ε maka amplitude kecepatan aliran darah akan semakin besar. Semakin besar nilai R_ω maka semakin besar nilai jari jari pembuluh darah dan frekuensi gradien tekanan, semakin kecil nilai viskositas kinematik yang menyebabkan perubahan kecepatan aliran darah semakin cepat.

5. DAFTAR PUSTAKA

- Baranyi, L. (2003). Computation of Unsteady Momentum and Heat Transfer From a Fixed Circular Cylinder in Laminar Flow. *Journal of computational and applied Mechanics*, 4(1), 13-25.
- Basuki, I., & Susanto, F. (2019). Aliran Fluida Laminer pada Pipa Non Horizontal. *JEECAE (Journal of Electrical, Electronics, Control, and Automotive Engineering)*, 4(2), 301-305.
- Chernyavsky, I. L., Jensen, O. E., & Leach, L. (2010). A Mathematical Model of Intervillous Blood Flow in the Human Placentone. *Placenta*, 31(1), 44-52.
- Fibich, G., Lanir, Y., & Liron, N. (1993). Mathematical Model of Blood Flow in a Coronary Capillary. *American Journal of Physiology-Heart and Circulatory Physiology*, 265(5), H1829-H1840.
- Leal, G. L. (2007). *Advanced Transport Phenomena*. New York: Cambridge.
- Rahman, M. S., & Haque, M. A. (2012). Mathematical Modeling of Blood Flow. In *2012 International Conference on Informatics, Electronics & Vision (ICIEV)* (pp. 672-676). IEEE.
- Salman, G., Fatimah, S., & Yulianti, K. (2018). Model Matematika untuk Kecepatan Aliran Darah. *Jurnal EurekaMatika*, 6(2), 73-82.
- Tiwow, V. A., & Malago, J. D. (2015). Penerapan Persamaan Navier-Stokes Untuk Kasus Aliran Fluida Laminer Pada Pipa Tidak Horizontal. *Jurnal Sains, Matematika, dan Pembelajarannya (SAINSMAT)*, 4(1), 51-56
- Wahyu (2009). *Sistem Peredaran Darah pada Manusia*. Bandung: Puri Delco.
- Womersley, J. R. (1955). Method for the Calculation of Velocity, Rate of Flow and Viscous Drag in Arteries When the Pressure Gradient is Known. *The Journal of physiology*, 127(3), 553.