



Pembangkitan Pohon Fraktal Bercabang Menggunakan Metode *Iterated Function System*

Retno Wulandari, Kosala Dwidja Purnomo*, Ahmad Kamsyakawuni

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember, Indonesia

*Correspondence: E-mail: kosala.fmipa@unej.ac.id

ABSTRAK

Pohon Pythagoras adalah sebuah fraktal datar yang tersusun dari bujur sangkar. Pohon Pythagoras yang memiliki dua percabangan dikembangkan menjadi tiga percabangan disebut dengan istilah pohon fraktal. Pada artikel ini, penulis membangkitkan pohon fraktal yang dikembangkan jumlah cabangnya sampai sebanyak n menggunakan metode *Iterated Function Systems* (IFS). Pohon fraktal dibangkitkan dengan metode IFS menggunakan transformasi affine yaitu dilatasi, translasi, dan rotasi pada persegi sebagai objek geometri awal. Pembangkitan pohon fraktal dimulai dengan menentukan bentuk dasar percabangan. Pemilihan bentuk dasar percabangan akan berpengaruh pada bentuk dan karakteristik dari pohon fraktal yang dihasilkan. Ada dua macam bentuk dasar percabangan sehingga dapat menghasilkan pohon fraktal yang memiliki beberapa variasi pemilihan sudut yakni sudut sama, sudut berbeda, dan sudut random.

© 2022 Kantor Jurnal dan Publikasi UPI

INFORMASI ARTIKEL

Sejarah Artikel:

Diterima 6 September 2022

Direvisi 30 September 2022

Disetujui 20 Oktober 2022

Tersedia Online 31 Oktober 2022

Dipublikasikan 6 Desember 2022

Kata Kunci:

Fraktal,
Metode *Iterated Function System*,
Pohon Fraktal,
Transformasi Affine.

ABSTRACT

*The Pythagorean tree is a flat fractal composed of squares. A Pythagorean tree with two branches developed into three components is called a fractal tree. In this article, the author generates a fractal tree that has been expanded to have n branches using the *Iterated Function Systems* (IFS) method. The fractal tree will be caused by the IFS method using affine transformations, namely dilation, translation, and rotation on a square as the initial geometric object. The generation of a fractal tree begins with determining the basic shape of the branching. The choice of the primary form of branching will affect the body and characteristics of the resulting fractal tree. There are two primary forms of branching to produce a fractal tree that has several variations in the selection of angles: the same angle, a different angle, and a random angle.*

© 2022 Kantor Jurnal dan Publikasi UPI

Keywords:

Affine Transformation,
Fractal,
Fractal Tree,
Iterated Function System
Method.

1. PENDAHULUAN

Sampurno dan Faryuni dalam bukunya yang berjudul *Metode Analisis Fraktal* pada tahun 2016, mengungkapkan bahwa fraktal adalah kumpulan pola-pola geometris baik yang terdapat di alam maupun berupa visualisasi model matematis, di mana pola tersebut diulang berkali-kali dengan skala yang semakin kecil. Fraktal dapat dihasilkan karena adanya pengulangan suatu pola secara rekursif (Hasang & Supardjo, 2012; Cahyo et al., 2016; Ramdhan et al., 2021). Secara umum fraktal bentuknya tidak sama dan memiliki detail tak hingga dengan struktur keserupaan diri pada tingkat perbesaran yang berbeda (Hasang & Supardjo, 2012). Fraktal dibagi menjadi dua jenis, yaitu himpunan fraktal (*fractal sets*) dan fraktal alami (*natural fractal*). Fraktal alami merupakan representasi geometri fraktal pada bentuk-bentuk objek di alam. Konsep geometri fraktal hampir selalu dapat ditemukan di lingkungan sekitar, misalnya bentuk awan, daun, atau pohon (Ngilawajan, 2015). Salah satu konsep geometri fraktal yang dapat divisualisasikan adalah pohon Pythagoras.

Pohon Pythagoras dibentuk dari dua bujur sangkar yang diletakkan diatas bujur sangkar pertama sampai kedua ujung dua bujur sangkar saling bertemu, sehingga menimbulkan ruang kosong berbentuk segitiga. Prosedur yang sama diterapkan secara rekursif pada dua bujur sangkar yang lebih kecil (Aggarwal dan Kartikeyan, 2010). Pengembangan dari pohon Pythagoras standar yang memiliki dua percabangan menjadi tiga percabangan disebut dengan pohon fractal (Sathakathulla & Akram, 2012). Salah satu cara untuk melakukan konstruksi pohon fraktal yaitu menggunakan metode *Iterated Function Systems* (IFS). Metode IFS dimanfaatkan untuk melakukan transformasi berkali-kali pada pola awal. Hasil transformasi pola awal akan menjadi suatu pola berulang dengan struktur yang sama pada detail tertentu (Utomo, 2011). Fraktal yang dibangkitkan dengan IFS terdiri dari gabungan beberapa tiruan dirinya sendiri yang ditransformasikan oleh sebuah fungsi. Contohnya, pada pembangkitan segitiga Sierpinski yang mempunyai sifat keserupaan diri identik sampai pada iterasi tak-hingga. Fungsi yang digunakan untuk membangkitkan segitiga Sierpinski adalah transformasi affine (Qi et al., 2014).

Penelitian sebelumnya dilakukan oleh Pourahmadazar et al. (2011) dimana pohon fraktal Pythagoras digunakan untuk mendisain antena monopole untuk *ultra wide band* dengan menggunakan metode iterasi fraktal. Penelitian lain yang dilakukan oleh Ramdhan et al., (2021) menyatakan bahwa pohon fraktal dapat dibangkitkan menggunakan metode *L-Systems*. Pohon fraktal memiliki dua cabang dan dikembangkan dengan menambahkan beberapa variasi, yaitu variasi ketebalan, panjang, dan sudut pada percabangan. Penelitian lain yang dilakukan oleh Purnomo et al., (2022) membangun pohon fraktal yang memiliki tiga cabang dengan memanfaatkan metode *Iterated Function Systems*. Pohon fraktal dibangkitkan dengan menentukan bentuk dasar percabangan kemudian menerapkan transformasi affine yaitu translasi, dilatasi, dan rotasi.

Berdasarkan beberapa penelitian yang telah disebutkan, penulis ingin mengembangkan percabangan pada pohon fraktal. Pohon fraktal akan dikembangkan dengan bentuk dasar percabangan yang berbeda dari penelitian sebelumnya sehingga memungkinkan terbentuknya pohon fraktal dengan cabang sebanyak n . Pembangkitan pohon fraktal dengan metode IFS menggunakan transformasi affine pada objek geometri awal yaitu persegi. Transformasi affine disusun dari transformasi linier seperti translasi, dilatasi, dan rotasi.

Persamaan dilatasi dengan faktor skala k dan titik pusat $A(a,b)$ dinyatakan pada persamaan (1) berikut.

$$[x' \ y'] = [k \ 0 \ 0 \ k][x - a \ y - b] + [a \ b] \quad (1)$$

Persamaan translasi dinyatakan pada persamaan (2) berikut.

$$[x' \ y'] = [x \ y] + [p \ q] = [x + p \ y + q] \quad (2)$$

Persamaan rotasi melalui pusat $P(a, b)$ dengan arah rotasi berlawanan arah jarum jam dinyatakan pada persamaan (3) berikut.

$$[x' \ y'] = [\cos \cos \theta \ -\sin \sin \theta \ \sin \sin \theta \ \cos \cos \theta][x - a \ y - b] + [a \ b] \quad (3)$$

dan persamaan rotasi dengan arah rotasi searah jarum jam dinyatakan pada persamaan (4) berikut.

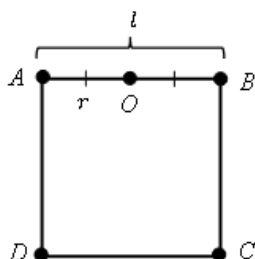
$$[x' \ y'] = [\cos \cos \theta \ \sin \sin \theta \ \theta \ \cos \cos \theta][x - a \ y - b] + [a \ b] \quad (4)$$

2. METODE

Langkah-langkah pembangkitan pohon fraktal dengan cabang sebanyak n dimulai dengan membangkitkan objek geometri awal yaitu persegi pada koordinat kartesius. Langkah selanjutnya adalah menentukan bentuk dasar percabangan. Ada dua bentuk dasar percabangan dari pohon fraktal pada penelitian ini.

a. Bentuk dasar percabangan sudut sama

Bentuk dasar percabangan sudut sama ditentukan dari jumlah cabang (b) yang diinputkan dengan nilai $b = 2, 3, \dots, n$. Tahapan pertama dimulai dengan mencari panjang l yang merupakan jarak dari titik A ke titik B dan $r = \frac{l}{2}$ adalah jarak dari titik A atau titik B ke titik tengah O seperti pada Gambar 1.

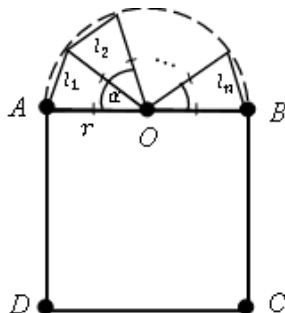


Gambar 1. Persegi

Jika semua persegi pada setiap cabang akan memiliki lebar yang sama seperti Gambar 2, maka sudut diujung segitiga adalah $\alpha = \frac{\pi}{n}$. Panjang sisi persegi baru yaitu l_1, l_2, \dots, l_n diperoleh dari persamaan (5) berikut:

$$l_n = l \cdot \sin \sin \frac{\alpha}{2} \quad (5)$$

dengan faktor skala $k_n = \frac{l_n}{l}$ ditampilkan pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2. Ilustrasi Cabang Sudut Sama

b. Bentuk dasar percabangan sudut berbeda

Bentuk dasar percabangan sudut berbeda dari pohon fraktal ditentukan dari jumlah cabang (b) dan sudut a yang diinputkan manual atau diatur secara random oleh sistem. Pemilihan sudut secara random akan diberikan aturan agar sudut a yang terpilih tidak terlalu kecil atau terlalu besar, karena akan berpengaruh pada percabangan pohon yang terbentuk. Batasan masalah ditampilkan pada persamaan (6) dan (7)

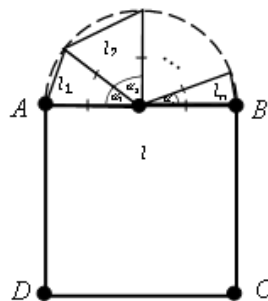
$$\frac{\pi}{3n} \leq \alpha_i \leq \frac{2\pi}{n+1} \tag{6}$$

$$\sum \alpha_i = \pi \tag{7}$$

Pada bentuk dasar percabangan sudut berbeda seperti pada Gambar 3 memiliki besar sudut α_i berbeda-beda setiap cabangnya, sehingga panjang sisi persegi baru diperoleh dari persamaan (8) berikut:

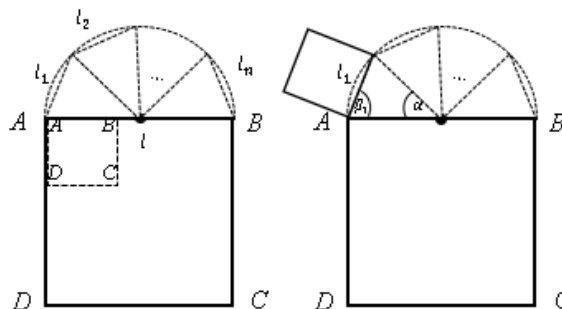
$$l_n = l \cdot \sin \sin \frac{\alpha_i}{2} \tag{8}$$

dengan faktor skala $k_n = \frac{l_n}{l}$ ditampilkan pada Gambar 3 berikut.



Gambar 3. Ilustrasi Cabang Sudut Berbeda

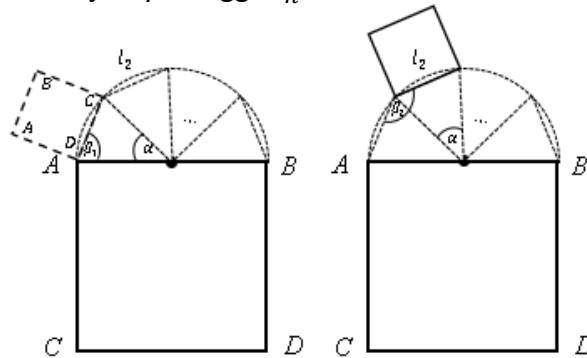
Langkah selanjutnya adalah membangun pohon fraktal menggunakan transformasi affine. Gambar 4 menunjukkan pembangunan pohon fraktal dimulai cabang pertama di sisi l_1 . Hasil duplikasi persegi awal akan diterapkan operasi dilatasi menggunakan Persamaan (1) dan operasi rotasi menggunakan persamaan (3).



Gambar 4. Ilustrasi Percabangan Sudut Sama di l_1

Gambar 5 menunjukkan pembentukan cabang kedua di sisi l_2 diperoleh dari duplikasi persegi di sisi l_1 , kemudian dilakukan operasi rotasi menggunakan Persamaan (3). Pada percabangan sudut berbeda hasil duplikasi akan diterapkan operasi dilatasi menggunakan

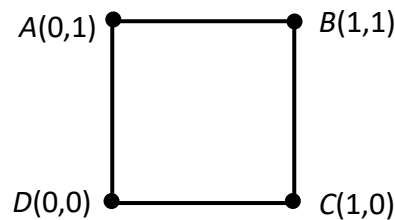
Persamaan (1) dan translasi menggunakan Persamaan (2) terlebih dahulu sebelum dilakukan operasi rotasi. Prosedur pembentukan cabang kedua di sisi l_2 dapat diterapkan pada pembentukan cabang sisi selanjutnya hingga l_n .



Gambar 5. Ilustrasi Percabangan Sudut Sama di l_2 .

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pohon fraktal akan dibangun menggunakan objek geometri awal yaitu persegi, kemudian dilakukan pembentukan dasar percabangan. Persegi dibangkitkan pada koordinat kartesius dengan titik awal (x, y) sebanyak jumlah titik sudut persegi seperti pada Gambar 6.



Gambar 6. Persegi.

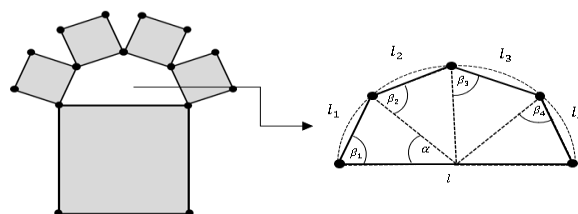
Jarak antara A dan B dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 l &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
 &= \sqrt{(1 - 0)^2 + (1 - 1)^2} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Jika ditentukan bentuk dasar percabangan sudut sama maka ilustrasi untuk $b = 4$ seperti pada Gambar 7 dengan besar $\alpha = 45^\circ$. Perhitungan panjang l_1, l_2, l_3 , dan l_4 menggunakan Persamaan (5) adalah sebagai berikut.

$$l_1 = l \cdot \sin \sin \frac{\alpha}{2} = 1 \cdot \sin \sin \frac{45}{2} = 0,3827$$

Hasil panjang $l_1 = 0,3827$ sama dengan panjang l_2, l_3 , dan l_4 diilustrasikan sebagai Gambar 7 berikut.



Gambar 7. Bentuk Dasar Percabangan Sudut Sama untuk $b = 4$.

Jika ditentukan bentuk dasar percabangan sudut berbeda, maka ilustrasi untuk $b = 4$ seperti pada Gambar 8. Pada penelitian ini sudut α dapat diinputkan atau dipilih secara random. Sudut yang dipilih secara random oleh sistem diberikan aturan seperti pada Persamaan (6). Aturan pemilihan sudut random adalah $15 \leq \alpha_i \leq 72$, misal dipilih $\alpha_1 = 30, \alpha_2 = 70, \alpha_3 = 60, \alpha_4 = 20$. Berikut perhitungan untuk mencari panjang l_1, l_2, l_3 , dan l_4 menggunakan Persamaan (8).

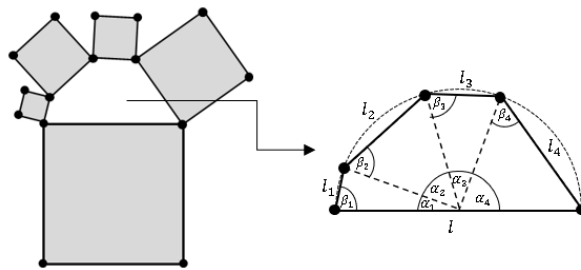
$$l_1 = l \cdot \sin \sin \frac{30}{2} = 0,2588$$

$$l_2 = l \cdot \sin \sin \frac{70}{2} = 0,5736$$

$$l_3 = l \cdot \sin \sin \frac{60}{2} = 0,5$$

$$l_4 = l \cdot \sin \sin \frac{20}{2} = 0,1736$$

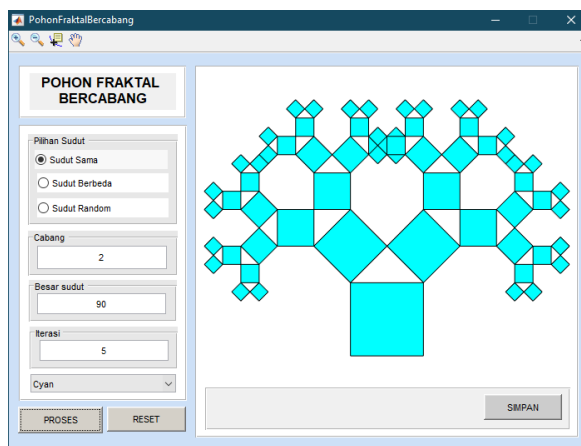
Pada iterasi selanjutnya dapat menerapkan langkah perhitungan yang sama untuk mencari sisi persegi baru.



Gambar 8. Bentuk Dasar Percabangan Sudut Berbeda untuk $b = 4$.

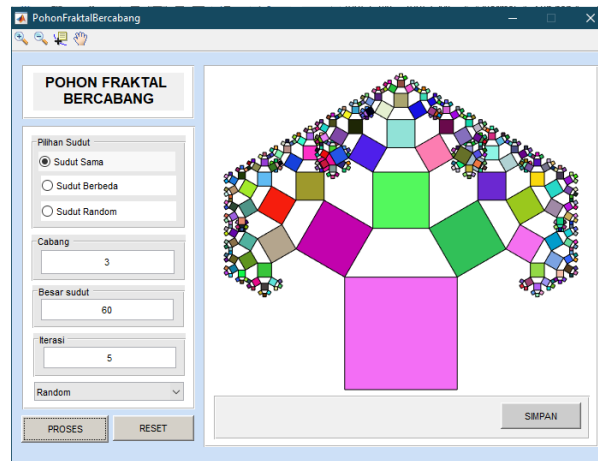
3.1. Hasil Simulasi Pohon Fraktal

Pembangunan pohon fraktal akan dilakukan dengan program yang dibuat menggunakan GUI pada MATLAB 2015b. Pembentukan pohon fraktal untuk pemilihan sudut sama pada program diawali dengan menginputkan jumlah cabang (b), sudut (α), iterasi, dan warna. Misal untuk $b = 2, \alpha = 90^\circ$, iterasi= 5, dan warna "cyan", dihasilkan visualisasi pohon fraktal seperti pada Gambar 9.



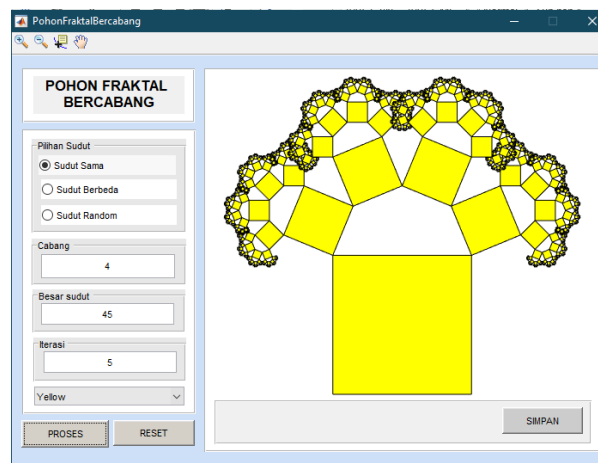
Gambar 9. Pohon Fraktal 2 Cabang dengan Sudut Sama pada Iterasi ke-5.

Gambar 10 merupakan hasil visualisasi pohon fraktal untuk $b = 3$, $\alpha = 60^\circ$, iterasi= 5, dan warna “random”.



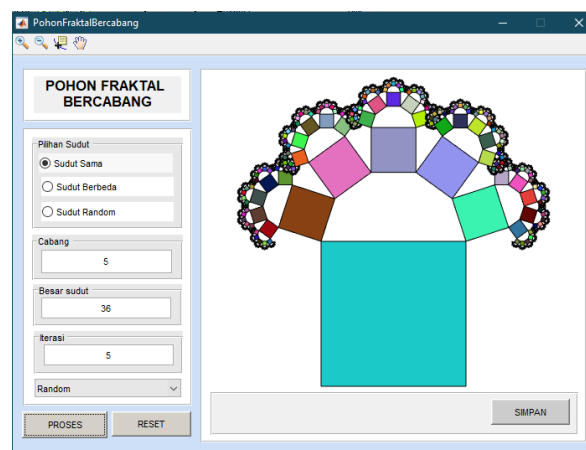
Gambar 10. Pohon Fraktal 3 Cabang dengan Sudut Sama pada Iterasi ke-5.

Gambar 11 merupakan hasil visualisasi pohon fraktal untuk $b = 4$, $\alpha = 45^\circ$, iterasi= 5, dan warna “yellow”.



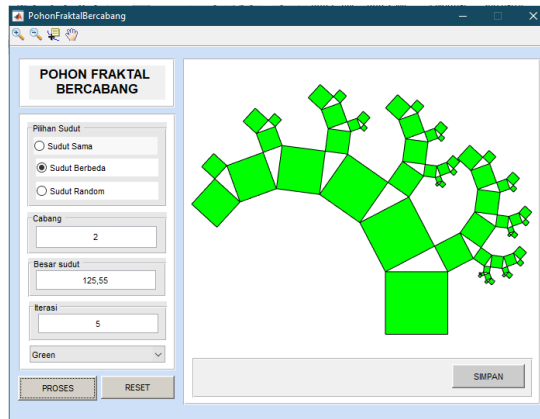
Gambar 11. Pohon Fraktal 4 Cabang dengan Sudut Sama pada Iterasi ke-5.

Gambar 12 merupakan hasil visualisasi pohon fraktal untuk $b = 5$, $\alpha = 36^\circ$, iterasi= 5, dan warna “random”.



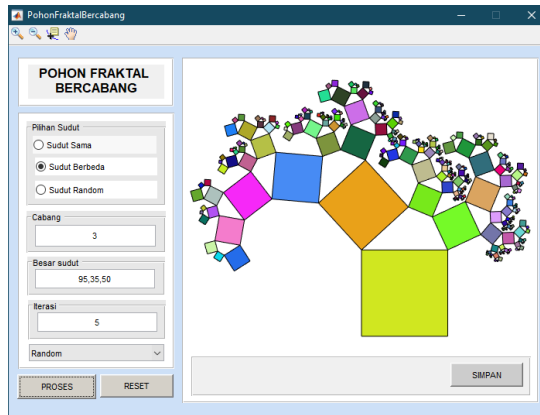
Gambar 12. Pohon Fraktal 5 Cabang dengan Sudut Sama pada Iterasi ke-5

Pembentukan pohon fraktal untuk pemilihan sudut berbeda pada program diawali dengan menginputkan jumlah cabang (b), sudut (α), iterasi, dan warna. Sudut α_i diinputkan dalam bentuk vektor dan harus memenuhi aturan Persamaan (7). Misal untuk $b = 2$, $[\alpha_1 \alpha_2] = [125 \ 55]$, iterasi= 5, dan warna "green", dihasilkan visualisasi pohon fraktal seperti pada Gambar 13.



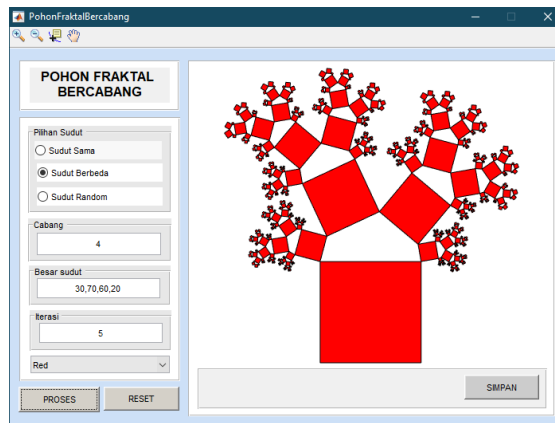
Gambar 13. Pohon Fraktal 2 Cabang dengan Sudut Berbeda pada Iterasi ke-5

Gambar 14 merupakan hasil visualisasi pohon fraktal untuk $b = 3$, sudut $[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3] = [95 \ 35 \ 50]$, iterasi= 5, dan warna "random".



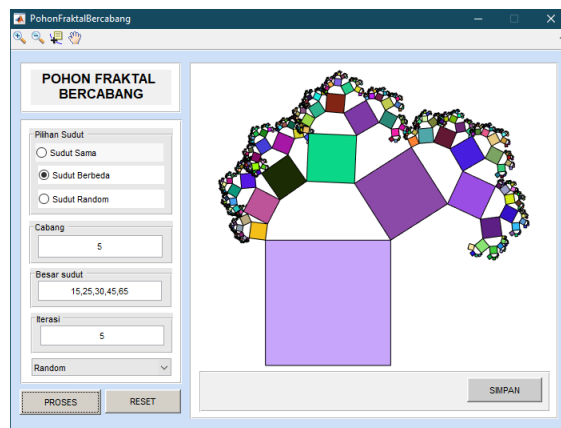
Gambar 14. Pohon Fraktal 3 Cabang dengan Sudut Berbeda pada Iterasi ke-5

Gambar 15 merupakan hasil visualisasi pohon fraktal untuk $b = 4$, sudut $[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4] = [30 \ 70 \ 60 \ 20]$, iterasi= 5, dan warna "red".



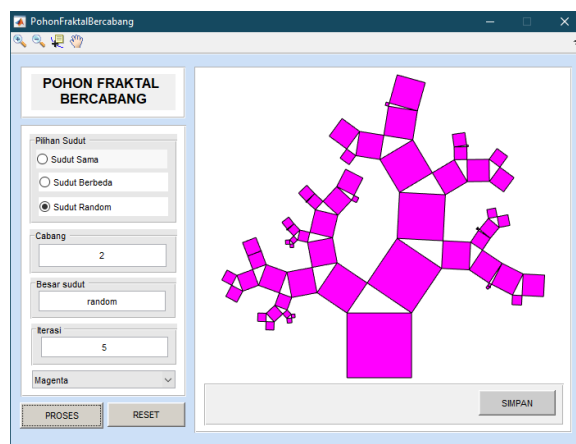
Gambar 15. Pohon Fraktal 4 Cabang dengan Sudut Berbeda pada Iterasi ke-5

Gambar 16 merupakan hasil visualisasi pohon fraktal untuk $b = 5$, sudut $[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5] = [15 \ 25 \ 30 \ 45 \ 65]$, iterasi= 5, dan warna “random”.

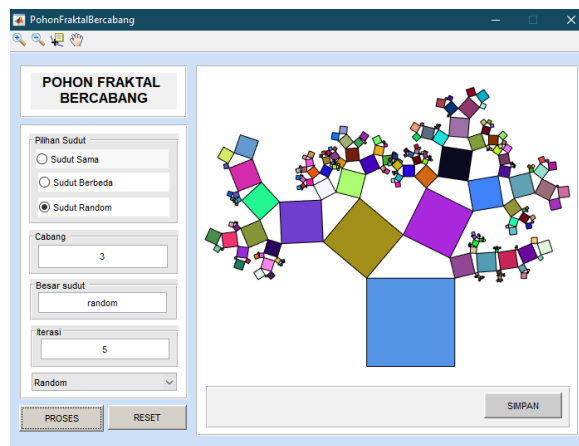


Gambar 16. Pohon Fraktal 5 Cabang dengan Sudut Berbeda pada Iterasi ke-5

Pada pembentukan pohon fraktal untuk pemilihan sudut random besar sudut α_i akan diatur oleh sistem dengan aturan seperti pada Persamaan (6). Misal untuk $b = 2$, iterasi = 5, dan warna “magenta”, dihasilkan visualisasi pohon fraktal seperti pada Gambar 17. Gambar 18 merupakan hasil visualisasi pohon fraktal untuk $b = 3$, iterasi = 5, dan warna “random”.

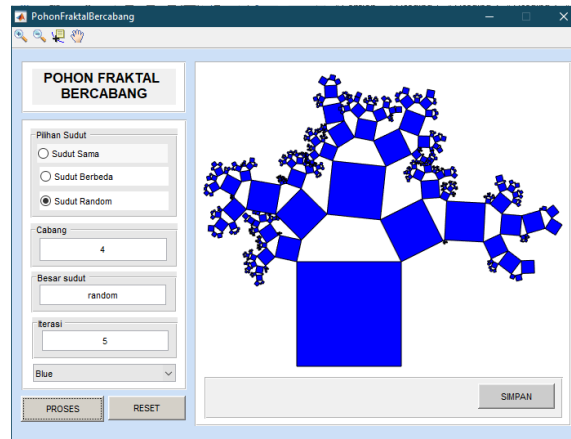


Gambar 17. Pohon Fraktal 2 Cabang dengan Sudut Random pada Iterasi ke-5

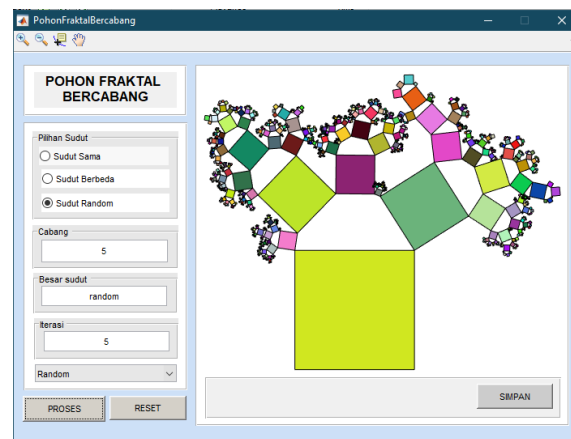


Gambar 18. Pohon Fraktal 3 Cabang dengan Sudut Random pada Iterasi ke-5

Gambar 19 merupakan hasil visualisasi pohon fraktal untuk $b = 4$, iterasi = 5, dan warna “blue”. Sedangkan, Gambar 20 merupakan hasil visualisasi pohon fraktal untuk $b = 5$, iterasi = 5, dan warna “random”.



Gambar 19. Pohon Fraktal 4 Cabang dengan Sudut Random pada Iterasi ke-5.



Gambar 20. Pohon Fraktal 5 Cabang dengan Sudut Random pada Iterasi ke-5.

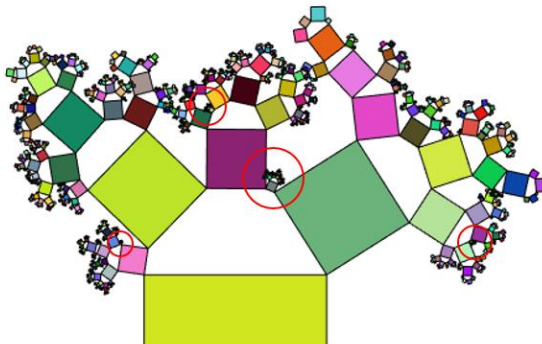
3.2 Pembahasan

Berdasarkan hasil visualisasi dari pohon fraktal diperoleh beberapa karakteristik yang dipengaruhi oleh bentuk dasar percabangan, jumlah cabang (b), dan sudut α . Pohon fraktal dengan $b \geq 5$ menghasilkan bentuk yang tidak mirip dengan bentuk pohon asli. Hal ini dikarenakan semakin banyak cabang akan menimbulkan semakin banyak ruang kosong yang berbentuk seperti bangun setengah lingkaran.

Pada pembangkitan pohon fraktal dengan pemilihan sudut sama, besar sudut α yang dipilih setiap cabangnya adalah sama sehingga bentuk percabangan mengikuti bentuk dasar percabangannya. Contohnya pada Gambar 11 pohon fraktal dengan $b = 4$, sisi disetiap percabangannya memiliki panjang yang sama. Bentuk dasar percabangannya seperti setengah bangun segi delapan, sehingga percabangan dari pohon fraktal yang dihasilkan juga berbentuk setengah bangun segi delapan.

Pada pembangkitan pohon fraktal dengan pemilihan sudut berbeda, besar sudut α yang dipilih akan mempengaruhi arah dari percabangan. Seperti pada **Gambar 13** bentuk pohon yang dihasilkan lebih condong ke arah kiri, lebih condong ke arah kanan seperti pada Gambar 16 atau lebih condong ke arah atas seperti pada Gambar 15.

Pada pembangkitan pohon fraktal dengan pemilihan sudut random, besar sudut α yang dipilih setiap cabang dan iterasi berbeda-beda. Hal tersebut mengakibatkan percabangan pohon yang terbentuk tidak terarah dan lebih mirip dengan percabangan pada pohon asli. Hasil pohon fraktal dengan pemilihan sudut random menunjukkan bahwa semakin banyak cabang semakin besar kemungkinan adanya percabangan yang tidak terlihat dengan jelas seperti pada Gambar 21.



Gambar 21. Potongan dari Pohon Fraktal dengan Sudut Random.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa bentuk dasar percabangan pada penelitian ini dapat membangkitkan pohon fraktal dengan cabang sebanyak n . Pohon fraktal yang diperoleh memiliki beberapa karakteristik, diantaranya sebagai berikut:

- Pohon fraktal dengan $b \geq 5$ menghasilkan bentuk yang tidak mirip dengan bentuk pohon asli, dikarenakan semakin banyak cabang akan menimbulkan semakin banyak ruang kosong yang berbentuk.
- Besar sudut α pada pohon fraktal dengan bentuk dasar percabangan sudut berbeda akan mempengaruhi arah dari percabangan.
- Hasil simulasi pohon fraktal dengan pemilihan sudut random lebih mirip bentuk pohon asli, akan tetapi terdapat cabang yang tidak terlihat dengan jelas dikarenakan sudut yang terpilih terlalu kecil.

5. DAFTAR PUSTAKA

- Aggarwal, A., & Kartikeyan, M. (2010). Pythagoras tree: A fractal patch antenna for multi-frequency and ultra-wide band-width operations. *Progress in Electromagnetics Research*, 16, 25-35.
- Cahyo, A. N., Rizali, N., & Bahari, N. (2016). Peran teknologi digital dan visual (batik) fraktal dalam perkembangan batik nusantara dan industri kreatif. *Brikolase: Jurnal Kajian Teori, Praktik dan Wacana Seni Budaya Rupa*, 8(2), 55-65.
- Hasang, S., & Supardjo, S. (2012). Geometri fraktal dalam rancangan arsitektur. *Media Matrasain*, 9(2), 111-124.
- Ngilawajan, D. A. (2015). Konsep geometri fraktal dalam kain tenun tanimbar. *Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 9(1), 33-39.

- Pourahmadazar, J., Ghobadi, C., & Nourinia, J. (2011). Novel modified Pythagorean tree fractal monopole antennas for UWB applications. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 10, 484-487.
- Purnomo, K. D., Wahyuningtyas, D., & Ubaidillah, F. (2022). Pembangkitan pohon fraktal tiga cabang dengan metode iterated function system. *Jurnal Ilmu Dasar*, 23(1), 9-16.
- Qi, H., Shiraz, M., Gani, A., Whaiduzzaman, M., & Khan, S. (2014). Sierpinski triangle based data center architecture in cloud computing. *The Journal of Supercomputing*, 69, 887-907.
- Ramdhan, P. G., Purnomo, K. D., & Ubaidillah, F. (2021). Variasi pohon fraktal menggunakan L-systems. *Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika*, 31(2), 77-92.
- Sathakathulla, A. A., & Akram, M. (2012). A note on cordial, edge cordial labeling of Pythagoras tree fractal graphs. *International Journal Science Engineering Research*, 3(12),1-5.
- Utomo, B. (2011). Fraktal dan invers fraktal. *Jurnal Matematika*, 2(1), 28-36.