Jurnal EurekaMatika

Journal homepage: https://ejournal.upi.edu/index.php/JEM

Nilai Minimal *Span* Pelabelan L(3,1) pada Graf Supercycle Sc(n,r)

Fanny Febryani, Kartika Yulianti, Yaya S. Kusumah, dan Utari Wijayanti*

Program Studi Matematika, FPMIPA, Universitas Pendidikan Indonesia
*Correspondence: E-mail: fannyfbryn@gmail.com, kartika.yulianti@upi.edu

A B S T R A K

Pelabelan $L(3,1)$ didefinisikan sebagai pemetaan dari himpunan titik pada graf G ke himpunan bilangan bulat positif dimana untuk setiap dua titik u, v jika $d(u,v) = 1$ berlaku $|f(u) - f(v)| \geq 3$ dan jika $d(u,v) = 2$ berlaku $|f(u) - f(v)| \geq 1$. Pada penelitian ini dirumuskan nilai minimal rentang (*span*) pelabelan $L(3,1)$ untuk graf *supercycle* $Sc(n,r)$, yang dinotasikan dengan $\lambda_{3,1}(Sc(n,r))$. Graf *supercycle* $Sc(n,r)$ merupakan hasil dari penggabungan dua buah graf khusus, yaitu graf *cycle* C_n dan graf *Hanoi* H_r. Proses penentuan nilai minimal *span* dari pelabelan $L(3,1)$ pada graf *supercycle*, digunakan metode pendeteksian pola, yaitu dilakukan pelabelan pada beberapa graf *supercycle* $Sc(n,r)$ dengan nilai n dan r tertentu, kemudian digeneralisasi secara induksi. Hasil penelitian ini diperoleh nilai $\lambda_{3,1}(Sc(n,1)) = 6$, jika n=1. Kemudian, $\lambda_{3,1}(Sc(n,1)) = 7$, jika n>1 dan n genap, $\lambda_{3,1}(Sc(n,1)) = 8$, jika n>1 dan n ganjil. Selanjutnya, $\lambda_{3,1}(Sc(n,r)) = 8$ untuk $r > 1$.

INFORMASI ARTIKEL

Sejarah Artikel:

Diterima 3 Oktober 2023
Direvisi 9 Oktober 2023
Disetujui 29 Oktober 2023
Tersedia online 1 November 2023
Dipublikasikan 1 Desember 2023

Kata Kunci:
Graf Supercycle,
Pelabelan $L(3,1)$.

A B S T R A C T

An $L(3,1)$ −labeling of a graph G is a function f from the set of vertex $V(G)$ to the set of positive integers for any two vertices u, v where label difference $|f(u) - f(v)| \geq 3$ for distance $d(u,v) = 1$ and label difference $|f(u) - f(v)| \geq 1$ for distance $d(u,v) = 2$. In this study, the smallest positive integer λ where the maximum label used on $L(3,1)$-labeling for supercycle graph $Sc(n,r)$ was formulated. The supercycle graph $Sc(n,r)$ is the result of combining two special graphs, namely cycle graph C_n and Hanoi graph H_r. To determine the formula for the minimum span value λ of $L(3,1)$ −labeling on supercycle graph, a pattern detection method is used, which is labeling several supercycle graph $Sc(n,r)$ with certain n and r values, then generalized. We obtained that $\lambda_{3,1}(Sc(n,1)) = 6$ if n= 1. Furthermore, $\lambda_{3,1}(Sc(n,1)) = 7$ if n>1 and even; $\lambda_{3,1}(Sc(n,1)) = 8$ if n>1 and odd. In addition, $\lambda_{3,1}(Sc(n,r)) = 8$, for $r > 1$.

Keywords:
$L(3,1)$-Labeling,
Supercycle Graph.

1. PENDAHULUAN

Graf merupakan salah satu cara untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan suatu objek dengan simpul, atau titik, atau vertex, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan sisi atau *edge* (Amri & Hadi, 2020; Mahmudah, 2022). Struktur, sifat, komponen dari graf, serta keterkaitannya dipelajari dalam teori graf.

Teori graf dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari antara lain menentukan persoalan rute pedagang keliling (*travelling sales person problem*) (Michail & Spirakis, 2016), persoalan tukang pos cina (*chinese postman problem*) (Wang & Wen, 2002), masalah jalur evakuasi (Hanawa, *et al*., 2018), analisis jejaring sosial (*social network analysis*) (Campbell, *et al.*, 2013), dan persoalan penentuan pemancar radio (Sagala, 2016). Permasalahan-permasalahan seperti itu dapat direpresentasikan ke dalam bentuk graf dengan titik-titik pada graf berkorespondensi dengan tempat-tempat yang berbeda dan 2 titik pada graf dihubunganKan dengan satu sisi jika dan hanya jika 2 tempat yang berkorespondensi dengan 2 titik tersebut terhubung.

Persoalan dalam penetuan frekuensi pemancar radio adalah menentukan frekuensi pada setiap pemancar radio sehingga jika ada 2 pemancar yang berdekatan, maka pemancar tersebut diberikan frekuensi yang berbeda, pemancar yang berdekatan harus menerima frekuensi dengan selisih yang cukup untuk menghindari pelayangan. Masalah dalam penentuan frekuensi pemancar ini mulai diperkenalkan oleh Fred Roberts dan Jerrold Griggs yang berencana menggunakan bilangan nonnegative mewakili saluran radio untuk mempelajari permasalahan penentuan saluran radio secara optimal pada pemancar di lokasi tertentu (Griggs & Yeh, 1992). Permasalahan tersebut berkaitan dengan pelabelan $L(h, k)$, yaitu pelabelan yang diberikan pada titik-titik suatu graf yang bergantung tidak hanya pada 2 titik bertetangga berjarak satu, tetapi juga berjarak lebih dari satu, dimana $|f(u) - f(v)| \geq h$ jika $d(u, v) = 1$ dan $|f(u) - f(v)| \geq k$ jika $d(u, v) = 2$ untuk $u, v \in V(G)$ (Calamoneri, 2011). Adapun permasalahan lain dari pelabelan $L(h, k)$ adalah bagaimana menentukan nilai minimum rentang (*span*) pelabelan pada suatu graf yang diberikan (Calamoneri, 2011). Khusus untuk nilai $h = 3$ dan $k = 1$, dinamakan pelabelan $L(3,1)$. Dengan kata lain, pelabelan $L(3,1)$ merupakan salah satu masalah pelabelan graf dimana titik-titik yang bertetangga harus memiliki selisih label minimal 3 sedangkan titik-titik yang terhubung oleh lintasan dengan panjang 2 harus memiliki label yang berbeda dengan selisih label minimal satu.

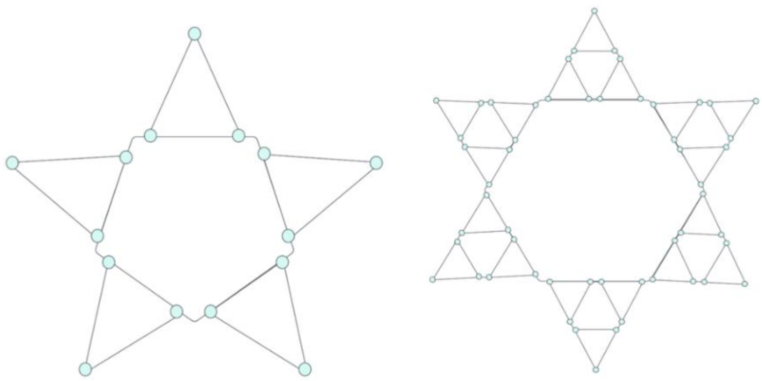
Terdapat beberapa peneliti sebelumnya yang mengkaji pelabelan $L(h, k)$. Gravier *et al.*, (2005), Shiu *et al*., (2008), Havet *et al*., (2011) telah meneliti pelabelan $L(2,1)$ pada beberapa jenis graf. Ghosh dan Pal (2016) membahas mengenai pelabelan $L(3,1)$ pada beberapa graf, yaitu graf lintasan, graf siklus (*cycle*), graf lengkap, graf bipartit, graf bintang, graf *bi-star*, dan graf *n-ary tree*. Adapun penelitian lainnya dilakukan oleh Chia, *et al.*, (2011) yang melakukan penelitian tentang nilai minimal *span* dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada beberapa jenis graf. Penelitian serupa juga pernah dilakukan oleh Calamoneri & Petreschi (2004) yang melakukan penelitian mengenai nilai minimal *span* dari pelabelan titik $L(h, 1)$ pada *subclass* dari graf planar. Sepanjang penelusuran literatur yang dilakukan oleh penulis, kajian mengenai pelabelan $L(3, 1)$ pada graf-graf khusus masih jarang digunakan. Oleh karena itu, pada penelitian ini dikaji penentuan minimum rentang (*span*) pelabelan titik $L(3, 1)$ pada graf supercycle $S_c(n, r)$ untuk $n = 2,3,4, \ldots$ dan $r \geq 1$. Graf *supercycle* $S_c(n, r)$ merupakan gabungan dari graf siklus (*cycle*) dan graf Hanoi H_r, dimana graf ini diperoleh dari graf *cycle* C_n yang setiap titiknya merupakan graf Hanoi H_r.

2. METODE

Pada penelitian ini, untuk menentukan rumus nilai minimal *span* dari pelabelan $L(3,1)$ pada graf *supercycle* $Sc(n,r)$ dilakukan dengan metode pendektesian pola yaitu mencari pola dari nilai minimal *span* untuk beberapa graf *supercycle* dengan jumlah titik tertentu, kemudian pembentukan konjektur atau dugaan. Setelah itu, dilakukan pembuktian secara umum untuk nilai n dan r.

Berdasarkan Ghosh dan Pal (2016), pelabelan $L(3,1)$ didefinisikan sebagai pemetaan f dari himpunan titik di G ke bilangan bulan non negative, dengan untuk setiap 2 titik u, v maka berlaku $|f(u) - f(v)| \geq 3$ jika $d(u,v) = 1$ dan $|f(u) - f(v)| \geq 1$ jika $d(u,v) = 2$. Jika f adalah fungsi pelabelan $L(3,1)$, $f : V \to \{0,1,2,3 \dots, k\}$, maka k adalah *span* dari pelabelan $L(3,1)$. Nilai minimal *span* dari suatu graf G dinotasikan dengan $\lambda(G)$ (Shiu *et al.*, 2008). Sehingga nilai minimal *span* dari pelabelan titik $L(3,1)$ graf G dinotasikan dengan $\lambda_{3,1}(G)$.

Graf *supercycle* $Sc(n,r)$ adalah graf yang diperoleh dari graf *cycle* C_n dengan mengganti semua titiknya menjadi graf Hanoi H_r, kemudian salah satu titik ujung H_r yang berderajat 2 dihubungkan dengan salah satu titik $H_r$lain yang juga berderajat 2. Graf *supercycle* memiliki siklus hamilton. Adapun contoh graf *supercycle* terdapat pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf $Sc(5,1))$ dan Graf $Sc(6,2)$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

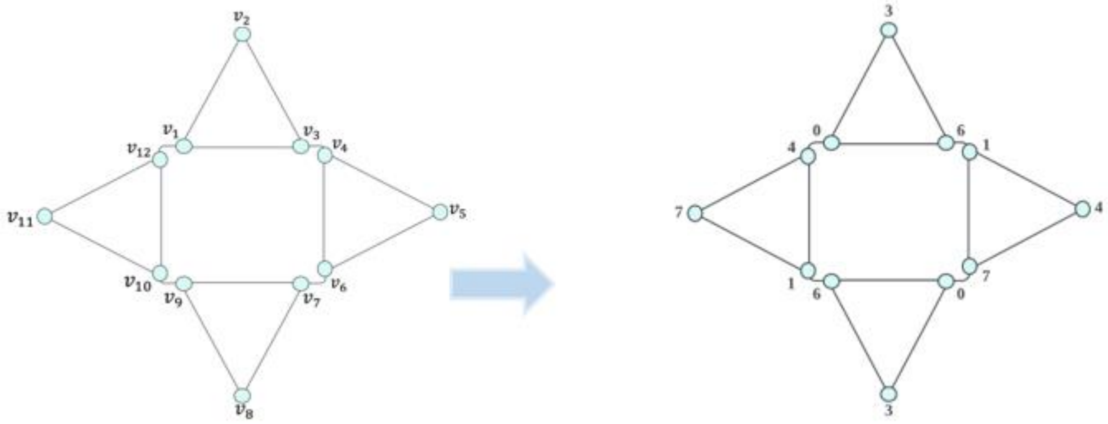
Pada bagian ini disajikan hasil pelabelan titik $L(3,1)$ untuk beberapa nilai n dan r pada $Sc(2,1)$, kemudian dilakukan pembuktian secara umum.

3.1 Pelabelan Titik $L(3,1)$ pada Graf *Supercycle* $Sc(n,1)$ untuk n bilangan genap

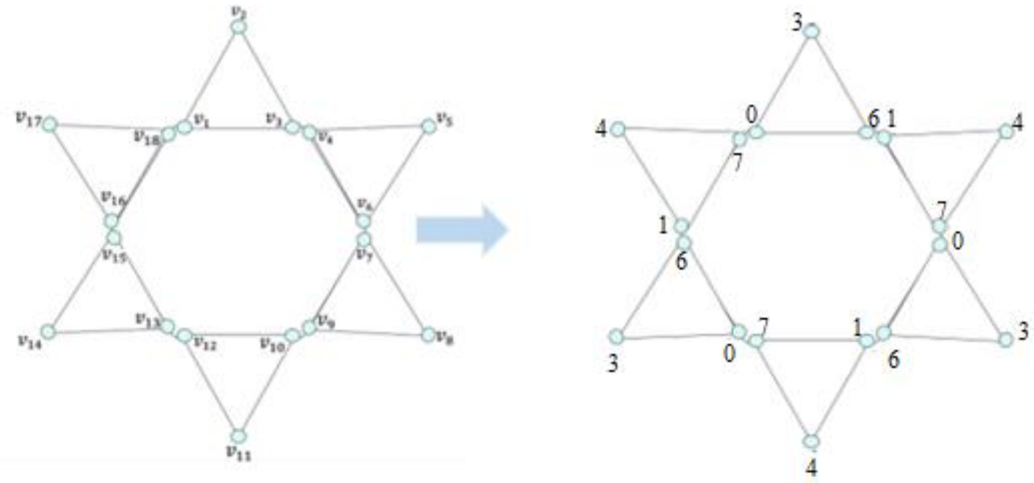
Gambar 2 menampilkan hasil pelabelan titik $L(3,1)$ pada graf *supercycle* $Sc(2,1)$. Misalkan titik v_1 diberi label 0. Karena titik v_2 dan v_3 masing-masing memiliki jarak 1 dari v_1, maka titik v_2 dan v_3 harus diberikan label dengan selisih minimal 3. Misalnya, titik v_2 diberi label 3 dan v_3 diberi label 6. Selanjutnya titik yang memiliki jarak 2 dari v_1 harus diberikan label dengan selisih minimal 1 terhadap 0, dan karena v_4 berjarak 1 dari v_3, maka v_4 harus diberikan label dengan selisih minimal 3, sehingga titik v_4 diberi label 1. Dengan cara yang sama, diperoleh label untuk v_5 yaitu 4 dan label untuk v_6 yaitu 7, sehingga didapatkan $g(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) = \{0,3,6,1,4,7\}$.

Gambar 2. Pelabelan $L(3,1)$ pada Graf $Sc(2,1)$

Dengan pola yang sama, dapat diperoleh pelabelan $L(3,1)$ pada graf *supercycle* $Sc(4,1)$, dan $Sc(6,1)$, yang ditampilkan pada Gambar 3 dan Gambar 4, dengan nilai $\lambda_{3,1}\big(Sc(4,1)\big) = \lambda_{3,1}(Sc(6,1)) = 7$. Pola tersebut dapat diterapkan pada $Sc(n,1)$ dengan n genap.



Gambar 3. Pelabelan $L(3,1)$ pada Graf $Sc(4,1)$

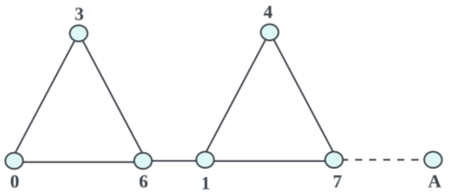


Gambar 4. Pelabelan $L(3,1)$ pada Graf $Sc(6,1)$

Berdasarkan pengamatan hasil pelabelan $L(3,1)$ pada graf $Sc(2,1)$, graf $Sc(4,1)$, dan graf $Sc(6,1)$, diperoleh kesamaan pola, yaitu nilai minimal *span*-nya adalah tujuh. Berikut ini adalah perumuman nilai minimal *span* $\lambda_{3,1}(Sc(n,1))$ untuk n genap.

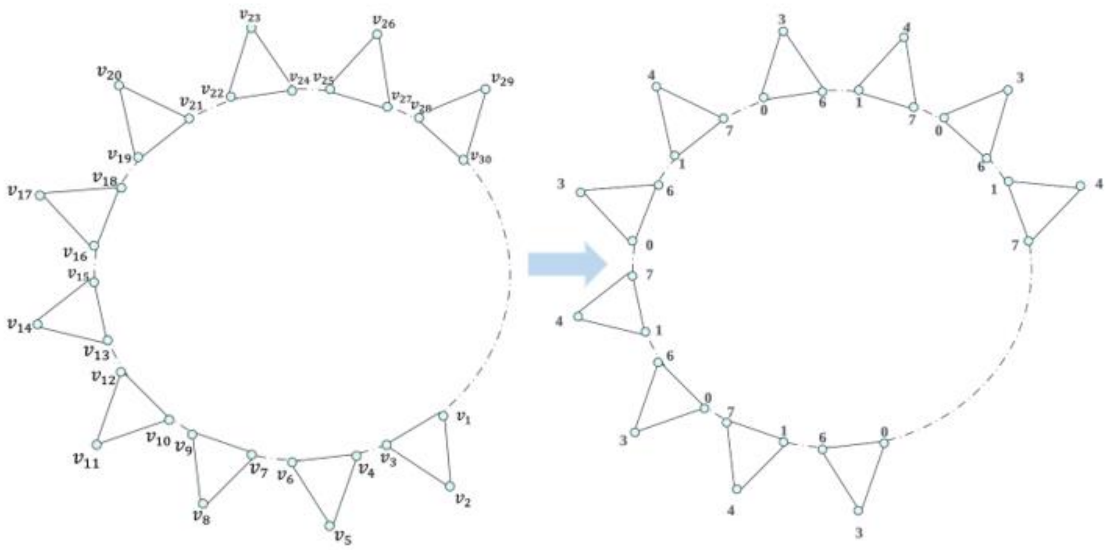
Teorema 1 Misalkan graf *G* adalah sebuah graf *supercycle* $Sc(n,1)$ dengan *n* genap, maka nilai minimal *span* dari pelabelan $L(3,1)$ pada *G* adalah $\lambda_{3,1}(Sc(n,1)) = 7$.

Bukti:



Gambar 5. Subgraf $Sc(n, 1)$ dengan *n* bilangan genap.

Apabila pada graf $Sc(n, 1)$ dengan *n* genap ditambahkan 1 titik (sebut titik A) dan berajasen dengan titik berlabel 7, maka titik A tersebut dapat dilabeli 0 atau 10 (ilustrasi terdapat pada Gambar 5). Hal ini karena sebagaimana ketentuan pelabelan $L(3,1)$, titik A harus memiliki selisih minimum 3 dengan titik yang berjarak 1 dan memiliki selisih minimum 1 dengan titik yang berjarak 2 dengan titik A, yaitu 1 dan 4. Apabila titik A diberi label 10, maka nilai minimum terbesar pelabelan $L(3,1)$ pada $Sc(n, 1)$ dengan *n* genap adalah 10. Di lain pihak, apabila titik A diberi label 0, maka nilai minimum pelabelan terbesar adalah 7, yang kurang dari 10. Sehingga dipilih 0 sebagai label yang diberikan pada titik A. Ini menghasilkan nilai minimum terbesar pelabelan 7. Untuk selanjutnya, titik-titik yang berajasen dengan titik A dapat diberi label 3 dan 6, sehingga pola label {0,3,6,1,4,7} dapat terus berulang. Dengan kata lain, apabila ditambahkan lagi sepasang subgraf Hanoi (H_1) pada graf tersebut, maka graf tersebut akan memiliki label {0,3,6,1,4,7} dan label tersebut selalu berulang, sehingga diperoleh hasil dari pelabelan titik $L(3,1)$ pada $Sc(n, 1)$ dengan n sebagai bilangan genap dan $n \geq 2$, seperti ditampilkan pada Gambar 6.



Gambar 6. Hasil Pelabelan $L(3,1)$ Graf *Sc*(*n*,1) untuk *n* bilangan genap.

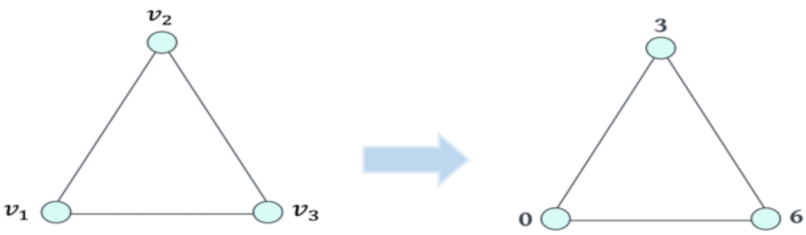
Dari pola perulangan titik tersebut, tujuh adalah nilai pelabelan minimum terbesar pada graf $Sc(n, 1)$ dengan n genap dan $n \geq 2$, sehingga terbukti bahwa $\lambda_{3,1}(Sc(n, 1)) = 7$ untuk n bilangan genap. Berdasarkan pola tersebut, pelabelan titik $L(3,1)$ pada graf *supercycle* $Sc(n, 1)$ dengan n bilangan genap, yang dapat dituliskan dengan fungsi sebagai berikut:

$$f(v_i) = \begin{cases} 0, & \text{jika } i = 1 + 6(k-1) \\ 3, & \text{jika } i = 2 + 6(k-1) \\ 6, & \text{jika } i = 3 + 6(k-1) \\ 1, & \text{jika } i = 4 + 6(k-1) \\ 4, & \text{jika } i = 5 + 6(k-1) \\ 7, & \text{jika } i = 6 + 6(k-1) \end{cases}$$

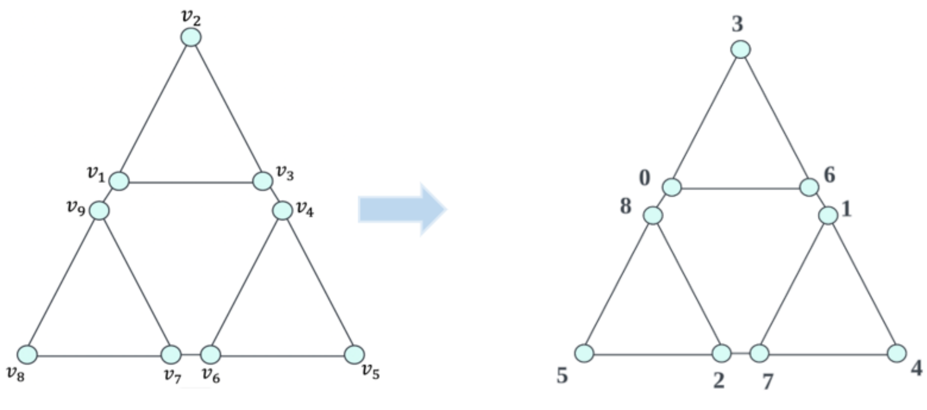
dimana $k = 1, 2, 3, \dots \frac{n}{2}$. Pelabelan dimulai dari v_1 yang merupakan titik pada graf $Sc(n, 1)$ yang berderajat 3. Selanjutnya, v_2 merupakan titik pada graf $Sc(n, 1)$ yang berderajat 2 dan berajasen dengan v_1, kemudian $v_3, v_4, \dots, v_{3n}$ merupakan titik-titik pada $Sc(n, 1)$ yang akan bertambah secara beruntun searah jarum jam (Gambar 6).

3.2 Pelabelan $L(3, 1)$ pada Graf *Supercycle* $Sc(n, 1)$ untuk n bilangan ganjil

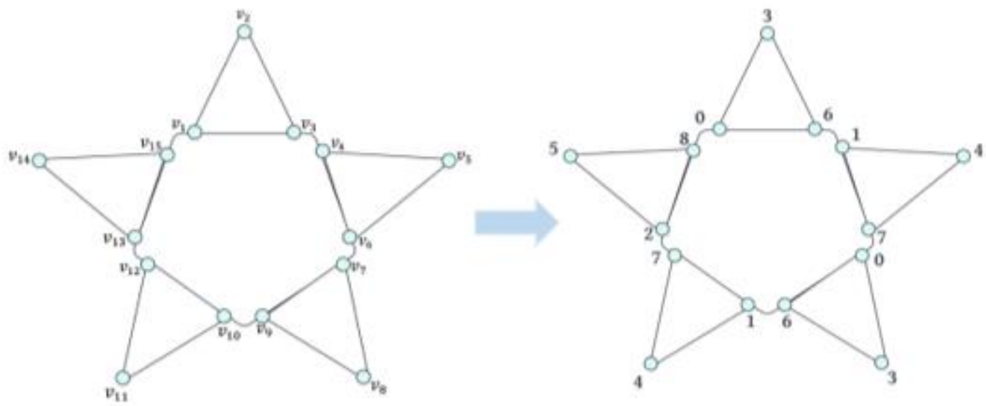
Pelabelan $L(3,1)$ untuk graf *supercycle* $Sc(1,1)$ ditunjukkan pada Gambar 7, yang memberikan nilai $\lambda_{3,1}(Sc(1,1)) = 6$. Pelabelan titik $L(3,1)$ untuk graf *supercycle* $Sc(3,1)$ ditampilkan pada Gambar 8, dengan nilai $\lambda_{3,1}(Sc(3,1)) = 8$. Selanjutnya, untuk pelabelan $L(3,1)$ pada graf *supercycle* $Sc(5, 1)$ dapat menggunakan pola pelabelan graf $Sc(3,1)$, yang disajikan pada Gambar 9 dengan nilai $\lambda_{3,1}(Sc(5, 1)) = 8$. Oleh karena itu, dapat dirumuskan teorema 2.



Gambar 7. Pelabelan $L(3,1)$ pada Graf $Sc(1,1)$



Gambar 8. Pelabelan $L(3,1)$ pad Graf $Sc(3,1)$



Gambar 9. Pelabelan $L(3,1)$ Graf $Sc(5,1)$

Teorema 2. Misalkan sembarang graf *G* adalah graf *supercycle* $Sc(n,1)$ dengan *n* ganjil. Nilai minimal *span* dari pelabelan $L(3,1)$ pada *G* adalah

$$\lambda_{3,1}(Sc(n,1)) \;=\begin{cases}6, \text{untuk } n=1\\ 8, \text{untuk } n>1\end{cases}$$

Bukti:

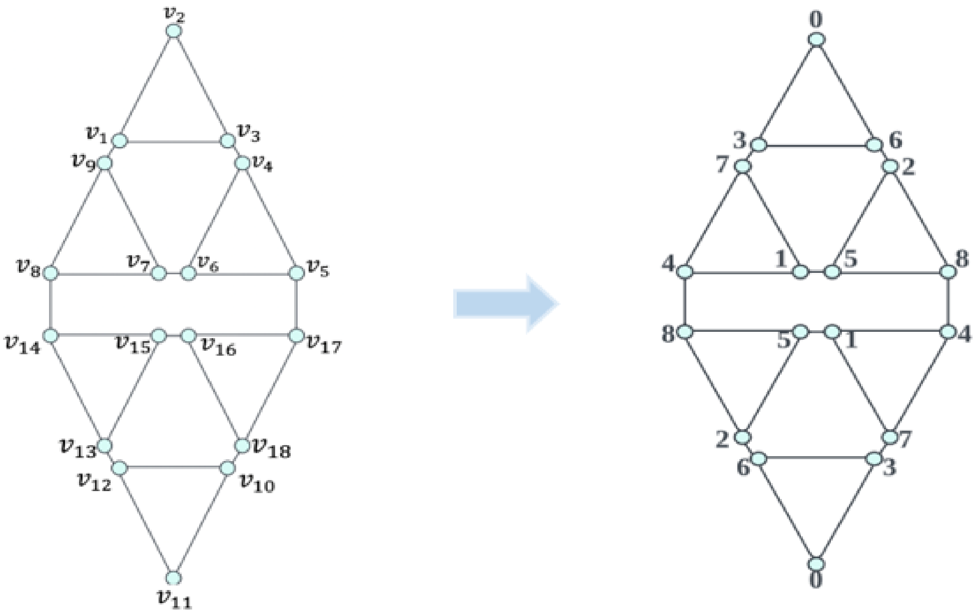
Untuk $n=1$, nilai $\lambda_{3,1}(Sc(n,1)) \;=6$, yaitu dengan mendefinisikan pelabelan $L(3,1)$ dengan fungsi $f:(v_1,v_2,v_3)\to\{0,3,6\}$. Untuk n ganjil, dengan $n\geq 3$, misalkan $V(Sc(n,1)))=\{v_1,v_2,\dots,v_{3n}\}$. Didefinisikan pelabelan titik $L(3,1)$ dengan pemetaan:

$$f(v_i)=\begin{cases}0, & i=1+6(k-1)\\ 3, & i=2+6(k-1)\\ 6, & i=3+6(k-1)\\ 1, & i=4+6(k-1)\\ 4, & i=5+6(k-1)\\ 7, & i=6+6(k-1),\\ \quad 2, & \quad i=3n-2\\ \quad 5, & \quad i=3n-1\\ \quad 8, & \quad i=3n\end{cases}$$

dimana $k=1,2,3,\dots\frac{n-1}{2}$, dan v_1 merupakan titik pada graf Hanoi H_1 yang berderajat 3. Selanjutnya, v_2 merupakan titik pada graf Hanoi yang berderajat 2 dan berajasen dengan v_1, kemudian $v_3,v_4,\dots,v_{3n}$ merupakan titik-titik pada $Sc(n,1)$ yang berurutan searah jarum jam. Berdasarkan definisi fungsi f tersebut, diperoleh $\lambda_{3,1}(Sc(n,1)) \;=8$, untuk $n\geq 3$ dan ganjil.

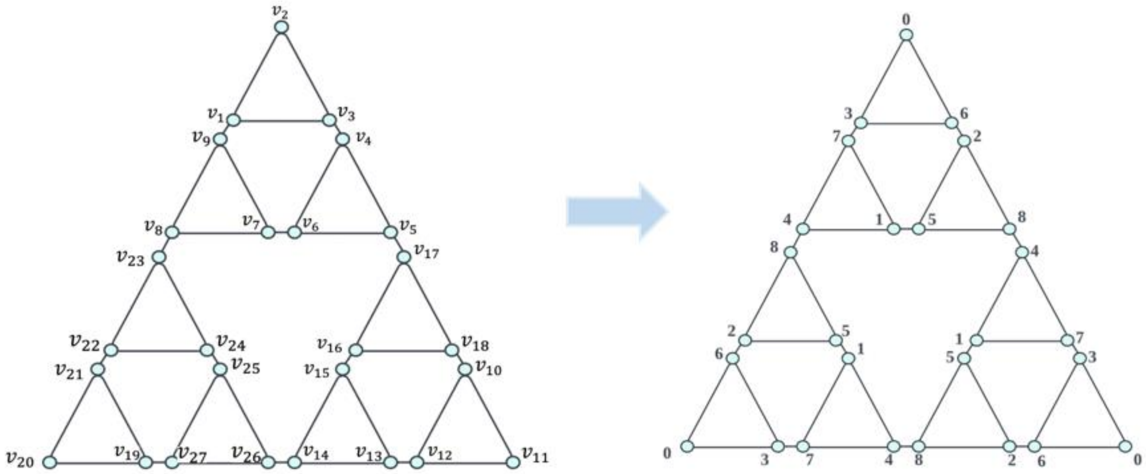
3.3 Pelabelan $L(3,1)$ pada Graf *Supercycle* $Sc(n,2)$

Graf $Sc(1,2)$ memiliki bentuk yang sama dengan graf $Sc(3,1)$ sehingga dapat diketahui nilai minimal *span*-nya adalah $\lambda_{3,1}\big(Sc(3,1)\big)=\lambda_{3,1}\big(Sc(1,2)\big)=\;8$. Graf *supercycle* $Sc(2,2)$ dan hasil pelabelan titik $L(3,1)$ ditampilkan pada Gambar 10. Pada graf $Sc(2,2)$ terdapat dua buah graf H_2. Graf H_2 bagian atas memiliki bentuk yang sama dengan graf $Sc(3,1)$ sehingga berdasarkan subbab 3.1 nilai minimum terbesar pada pelabelan titik $L(3,1)$untuk graf *supercycle* $Sc(2,2)$ adalah 8. Selanjutnya dilakukan pelabelan untuk graf H_2 bagian bawah dengan cara menduplikat label sehingga diperoleh $g(v)$ seperti pada Gambar 10.



Gambar 10. Pelabelan $L(3{,}1)$ pada Graf $Sc(2{,}2)$

Secara umum, graf $Sc(n,2)$) terdiri dari n buah graf H_2 yang masing-masing graf H_2 merupakan graf $Sc(3{,}1)$. Sehingga dapat dilakukan pelabelan dengan cara menduplikat pelabelan $Sc(3{,}1)$ searah jarum jam untuk setiap graf H_2 yang dilalui sehingga diperoleh nilai minimal pelabelan terbesar pada graf $Sc(n,2)$ adalah 8. Sebagai ilustrasi pada Gambar 11 menampilkan pelabelan $L(3{,}1)$ untuk graf $Sc(3{,}2)$.



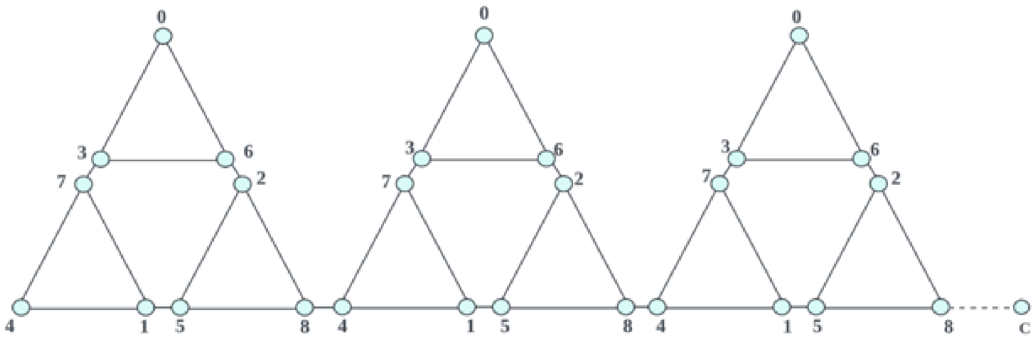
Gambar 11. Pelabelan $L(3{,}1)$ pada Graf $Sc(3{,}2)$

Teorema 3. Misalkan sembarang graf G adalah graf *supercycle* $Sc(n,2)$ maka nilai minimal *span* dari pelabelan $L(3{,}1)$ pada G adalah

$$\lambda_{3,1}(Sc(n,2)) = 8.$$

Bukti:

Pembuktian dilakukan secara induksi matematis terhadap nilai n. Untuk $n = 1$, berdasarkan Gambar 8 diperoleh $\lambda_{3,1}(Sc(1{,}2)) = 8$. Misalkan $\lambda_{3,1}(Sc(n,2)) = 8$. Graf $Sc(n+1,2)$ diperoleh dari graf $Sc(n,2)$ dengan menambahkan sebuah graf H_2 pada siklus rangkaian graf H_2 dalam graf $Sc(n,2)$. Apabila pada subgraf $Sc(n,2)$ ditambahkan 1 titik yang merupakan sebuah titik pada graf H_2 (sebut titik C) dan berajasen dengan titik berlabel 8, maka titik C tersebut dapat dilabeli dengan angka yang sesuai sebagaimana ketentuan pelabelan $L(3,1)$, yaitu titik C harus memiliki selisih minimum 3 dengan titik yang berjarak 1 dan memiliki selisih minimum 1 dengan titik yang berjarak 2 dengan titik yang berlabel 2 dan 5 (ilustrasi terdapat pada Gambar 12). Apabila titik C diberi label 12, maka nilai minimum terbesar pelabelan $L(3,1)$ pada $Sc(n,2)$ adalah 12. Di lain pihak, apabila titik C diberi label 0, 3, atau 4, maka nilai minimum pelabelan terbesar adalah 8, yang kurang dari 12. Agar terdapat pola berulang, dipilih 4 sebagai label yang diberikan pada titik C. Ini menghasilkan nilai minimum terbesar pelabelan 8. Untuk selanjutnya, titik-titik yang berajasen dengan titik C dapat diberi label 1 dan 7, sehingga diperoleh pola label {0,3,6,1,4,7,2,5,8} pada graf H_2 yang merupakan subgraf dari graf $Sc(n,2)$. Dengan kata lain, apabila ditambahkan lagi graf H_2 pada graf $Sc(n,2)$, maka graf H_2 tersebut akan memiliki label {0,3,6,1,4,7,2,5,8} dan label tersebut selalu berulang, sehingga diperoleh $\lambda_{3,1}(Sc(n+1{,}2)) = 8$.



Gambar 12. Ilustrasi Pelabelan $L(3,1)$ pada Graf $Sc(n,2)$

Teorema 4. Misalkan G adalah graf *supercycle* $Sc(n,r)$ dengan $n,r \in \mathbb{N}$, dan $r > 1$ maka nilai minimal *span* dari pelabelan $L(3,1)$ pada G adalah $\lambda_{3,1}\big(Sc(n,r)\big) = 8$.

Bukti:
Pembuktian dilakukan secara induksi matematis terhadap nilai r. Untuk $r = 2$, berdasarkan Teorema 3 diperoleh $\lambda_{3,1}(Sc(n,2)) = 8$. Misalkan $\lambda_{3,1}(Sc(n,r)) = 8$. Graf *supercycle* $Sc(n,r+1)$ dibentuk dari graf $Sc(n,r)$, di mana subgraf $Sc(n,r)$ akan membentuk suatu subgraf baru saat digabungkan dengan subgraf baru lain. Dengan menggabungkan subgraf baru yang memiliki pola yang sama dengan subgraf yang sudah ada, diperoleh bahwa pola berulang yang sebelumnya terlihat dalam $Sc(n,r)$ akan berlanjut dalam graf $Sc(n,r+1)$. Dengan kata lain, susunan subgraf $Sc(n,r)$ akan terus menjadi bagian dari graf-graf yang lebih besar dan akan terus menjaga konsistensi nilai minimal label terbesar yang sudah terbukti sebelumnya adalah 8 untuk $Sc(n,r)$. Dengan demikian, $\lambda_{3,1}(Sc(n,r+1)) = 8$.

4. KESIMPULAN

Pada artikel ini telah ditunjukkan pelabelan $L(3,1)$ pada graf *supercycle* $Sc(n,r)$ untuk beberapa nilai n dan r. Berdasarkan pengamatan pola dan dibuktikan secara induksi matematika, nilai minimal *span* dari pelabelan $L(3,1)$ pada graf *supercycle* $Sc(n,r)$ adalah

$$\lambda_{3,1}(Sc(n,1)) = \begin{cases} 6, & \text{jika } n = 1 \\ 7, & \text{jika } n > 1, n\ genap \\ 8, & \text{jika } n > 1, n\ ganjil, \end{cases}$$

dan $\lambda_{3,1}\big(Sc(n,r)\big) = 8$, untuk $r > 1$. Bagi penelitian selanjutnya dapat dikaji nilai minimal *span* pelabelan $L(3{,}1)$ untuk graf lain seperti graf Sierspinski.

5. DAFTAR PUSTAKA

Amri, Z., & Hadi, R. (2020). Pembentukan graf berdasarkan benda langit (bintang) dengan selisih nilai magnitude tertentu di OIF UMSU. *Al-Marshad: Jurnal Astronomi Islam dan Ilmu-Ilmu Berkaitan*, *6*(1), 24-33.

Calamoneri, T. (2011). The L (h, k)-labelling problem: an updated survey and annotated bibliography. *The Computer Journal*, *54*(8), 1344-1371.

Calamoneri, T., & Petreschi, R. (2004). L (h, 1)-labeling subclasses of planar graphs. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, *64*(3), 414-426.

Campbell, W. M., Dagli, C. K., & Weinstein, C. J. (2013). Social network analysis with content and graphs. *Lincoln Laboratory Journal*, *20*(1), 61-81.

Chia, M. L., Kuo, D., Liao, H. Y., Yang, C. H., & Yeh, R. K. (2011). L(3,2,1)-labeling of graphs. *Taiwanese Journal of Mathematics*, *15*(6), 2439-2457.

Ghosh, S., & Pal, A. (2016). L(3,1)-labeling of some simple graphs. *Advanced Modeling and Optimization*, *18*(2), 243-248.

Gravier, S., Klavžar, S., & Mollard, M. (2005). Codes and L(2,1)-labelings in sierpiński graphs. *Taiwanese Journal of Mathematics*, *9*(4) 671-681.

Griggs, J. R., & Yeh, R. K. (1992). Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, *5*(4), 586-595.

Hanawa, Y., Higashikawa, Y., Kamiyama, N., Katoh, N., & Takizawa, A. (2018). The mixed evacuation problem. *Journal of Combinatorial Optimization*, *36*, 1299-1314.

Havet, F., Klazar, M., Kratochvíl, J., Kratsch, D., & Liedloff, M. (2011). Exact algorithms for L (2, 1)-labeling of graphs. *Algorithmica*, *59*, 169-194.

Mahmudah, M. (2022). Aplikasi pewarnaan graf terhadap penyimpanan bahan kimia. *Jurnal Educazione: Jurnal Pendidikan, Pembelajaran dan Bimbingan dan konseling*, *10*(2), 108-115.

Michail, O., & Spirakis, P. G. (2016). Traveling salesman problems in temporal graphs. *Theoretical Computer Science*, *634*, 1-23.

Sagala, Y. (2016). Pelabelan L(2,1) pada graf sierpiński S(n,k). *Kumpulan Artikel Ilmiah, Informatika, Statistik, Matematika dan Aplikasi*, *3*(2).

Shiu, W. C., Shao, Z., Poon, K. K., & Zhang, D. (2008). A new approach to the L(2,1)-labeling of some products of graphs. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, *55*(8), 802-805.

Wang, H. F., & Wen, Y. P. (2002). Time-constrained chinese postman problems. *Computers & Mathematics with applications*, *44*(3-4), 375-387.