Jurnal EurekaMatika 12(2) (2024) 131-142

Jurnal EurekaMatika

Journal homepage: https://ejournal.upi.edu/index.php/JEM

Komparasi Metode Dekomposisi Matriks Menilai Kelebihan dan Kekurangan SVD, QR, dan LU dalam Aplikasi Aljabar Linear

Arif Zidan Prayogo, Fiqih Nur Hadi, dan Army Kanaya Azzahra*

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Militer, Universitas Pertahanan Republik Indonesia, Jawa Barat, Indonesia

*Correspondence: az.prayogo1987@gmail.com

A B S T R A K

Dekomposisi matriks seperti *Singular Value Decomposition* (SVD), *Dekomposisi QR*, dan *Dekomposisi LU* memiliki peran penting dalam berbagai aplikasi yang melibatkan analisis data, pemecahan sistem persamaan, dan pengamanan data. Metode yang digunakan adalah tinjauan literatur terhadap berbagai penelitian terkini yang mengeksplorasi aplikasi SVD, QR, dan LU dalam *watermarking*, enkripsi, serta deteksi intrusi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa SVD sangat cocok untuk aplikasi yang membutuhkan komputasi fleksibel seperti pengolahan citra dan pengurangan dimensi, QR unggul dalam stabilitas numerik dan presisi tinggi untuk pemecahan sistem persamaan linear dan kriptografi, sedangkan LU lebih efisien dalam penyelesaian sistem persamaan linear besar. Pembahasan ini menekankan keunggulan spesifik masing-masing metode dan aplikasi potensialnya di berbagai bidang.

INFORMASI ARTIKEL

Sejarah Artikel:

Diterima 8 September 2024
Direvisi 18 Oktober 2024
Disetujui 1 November 2024
Tersedia online 9 November 2024
Dipublikasikan 9 November 2024

Kata Kunci:
Aljabar Linear,
Dekomposisi Matriks,
Dekomposisi LU,
Dekomposisi QR,
Singular Value Decomposition (SVD).

A B S T R A C T

Matrix decomposition techniques like Singular Value Decomposition (SVD), QR decomposition, and LU decomposition play crucial roles in various applications involving data analysis, system-solving, and data security. This study employs a literature review of recent research that explores the applications of SVD, QR, and LU in watermarking, encryption, and intrusion detection. The findings indicate that SVD is well-suited for applications requiring flexible computation, such as image processing and dimensionality reduction. QR excels in numerical stability and high precision for solving linear systems and cryptography; while LU is more efficient for large-scale linear system solutions. This discussion emphasizes the specific advantages of each method and its potential applications across different fields.

Keywords:
Linear Algebra,
LU Decomposition,
Matrix Decomposition,
Singular Value Decomposition,
QR Decomposition.

1. PENDAHULUAN

Dekomposisi matriks merupakan salah satu teknik fundamental dalam ilmu matematika, aljabar terapan, dan statistik yang berperan penting dalam analisis data, pemecahan sistem persamaan, dan pemodelan berbagai fenomena (Breaz & Rafiliu, 2023; Bru et al., 2023; Deng et al., 2023). Teknik ini memungkinkan pemecahan matriks menjadi komponen-komponen yang lebih sederhana, sehingga memudahkan dalam memahami struktur dan sifat-sifat matriks tersebut (Marco *et al.*, 2024). Dalam konteks ini, terdapat beberapa metode dekomposisi yang umum digunakan, antara lain *Singular Value Decomposition* (SVD), dekomposisi *QR*, dan dekomposisi *LU.* Masing-masing metode ini memiliki karakteristik yang berbeda, sehingga penggunaannya dapat disesuaikan dengan kebutuhan analisis tertentu. Dekomposisi yang tepat tidak hanya meningkatkan efisiensi komputasi tetapi memungkinkan pengembangan teknik yang lebih canggih untuk analisis data dan pemodelan matematis yang dapat meningkatkan akurasi hasil analisis (Aazmi *et al.*, 2024; Huda *et al.*, 2022; Le Borne, 2023).

Singular Value Decomposition (SVD) merupakan metode dekomposisi matriks untuk menganalisis matriks, terutama dalam konteks pengurangan dimensi dan identifikasi pola (Cao Thi, 2023; Gidisu & Hochstenbach, 2024). Dengan memecah matriks menjadi komponen-komponen fundamental, SVD dapat mengungkapkan informasi penting yang tersembunyi dalam data (Respondek, 2022; Xu & Pan, 2024). Metode ini sering digunakan dalam berbagai aplikasi, seperti *image processing*, analisis data besar, dan *machine learning* (Li & Li, 2024). Keunggulan SVD terletak pada kemampuannya untuk menangani matriks yang tidak persegi dan memberikan hasil yang stabil secara numerik, meskipun dengan biaya komputasi yang relatif tinggi. Oleh karena itu, SVD sering dijadikan pilihan utama dalam analisis data yang kompleks dan berukuran besar (Chen et al., 2024; Ma et al., 2024; Shmueli et al., 2024).

Dalam pengembangan algoritma, pemilihan metode dekomposisi yang tepat sangat penting, tergantung pada sifat dan ukuran matriks yang dianalisis (Fan *et al*., 2022). Dekomposisi QR memfokuskan pada pembagian matriks menjadi dua matriks: satu matriks ortogonal dan satu matriks segitiga atas. Metode ini sering digunakan dalam pemecahan sistem persamaan linear dan analisis regresi. Salah satu keunggulan utama dari dekomposisi QR adalah stabilitas numeriknya yang lebih baik dibandingkan metode lainnya, sehingga lebih efisien dalam konteks iteratif. Hal ini menjadikannya pilihan yang baik untuk aplikasi yang membutuhkan solusi cepat dan akurat (Savenkov *et al*., 2024). Selain itu, dekomposisi QR juga memberikan keuntungan dalam mengurangi kesalahan pembulatan yang mungkin terjadi dalam proses komputasi, sehingga menghasilkan solusi yang lebih handal (Guo *et al*., 2024).

Sementara itu, dekomposisi LU menguraikan matriks menjadi produk dari matriks segitiga bawah dan segitiga atas (Yang & Peng, 2023). Metode ini sangat berguna dalam konteks pemecahan sistem persamaan linear, terutama ketika sistem tersebut harus diselesaikan (Ni *et al*., 2024; Sun *et al*., 2020; Zhuang *et al*., 2024). berulang kali dengan matriks yang sama (Fidalgo-Pereira *et al*., 2024; Zhu & Wei, 2022). Dekomposisi LU memiliki keunggulan dalam hal kecepatan pemecahan dan penyimpanan informasi struktural dari matriks, meskipun terkadang menghadapi kendala pada matriks yang tidak positif definit. Dalam banyak kasus, metode LU juga dapat dioptimalkan untuk memanfaatkan sparsity dari matriks, yang sangat bermanfaat dalam aplikasi besar dan kompleks.

Perbandingan antara ketiga metode dekomposisi, yaitu Singular Value Decomposition (SVD), Dekomposisi QR, dan Dekomposisi LU, memberikan wawasan yang berharga bagi peneliti dan praktisi dalam memilih teknik yang paling sesuai untuk aplikasi spesifik mereka (Q. Liu *et al*., 2023). Memahami kelebihan dan kekurangan dari masing-masing metode merupakan kunci untuk melakukan analisis yang efektif dan efisien. Misalnya, SVD sering digunakan untuk praproses data, mengurangi dimensi dan mengidentifikasi pola, sebelum diterapkan pada algoritma yang lebih kompleks dengan QR atau LU yang lebih baik dalam memecahkan sistem persamaan linier. Dekomposisi matriks berfungsi sebagai jembatan antara teori matematika dan praktik aplikatif, memungkinkan ilmuwan dan insinyur untuk mengatasi tantangan yang muncul dalam pemrosesan data dan analisis (Jalali *et al.*, 2023). Dengan eksplorasi terus-menerus mengenai kelebihan dan kelemahan masing-masing metode, kita dapat meningkatkan kemampuan dalam merancang solusi yang lebih efisien dan efektif.

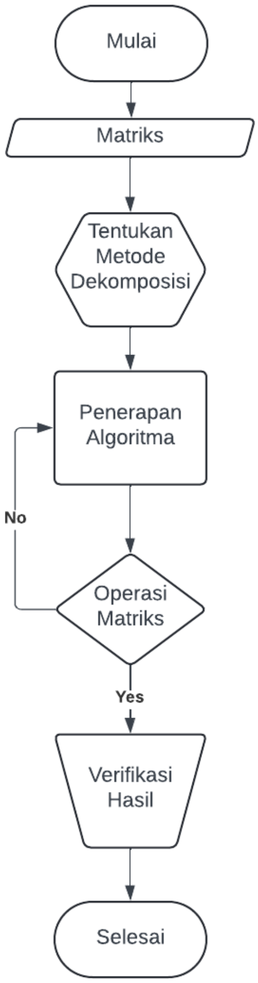
Dengan terus berkembangnya bidang ilmu data dan komputasi, eksplorasi lebih lanjut mengenai dekomposisi matriks akan semakin penting untuk meningkatkan kemampuan analisis dan pemodelan dalam berbagai disiplin ilmu. Penelitian terkini menunjukkan bahwa inovasi dalam algoritma dekomposisi dapat mengarah pada peningkatan performa dalam aplikasi dunia nyata, termasuk dalam bidang pengolahan sinyal, machine learning, dan analisis statistik. Oleh karena itu, pemahaman yang mendalam tentang metode dekomposisi matriks tidak hanya berkontribusi pada pengembangan teori, tetapi juga pada penerapan praktis yang dapat memberikan dampak signifikan di berbagai sektor (Dubiel *et al.*, 2022).

2. METODE

Matriks adalah suatu susunan angka atau elemen yang terorganisir dalam bentuk baris dan kolom. Matriks digunakan dalam banyak cabang matematika, terutama dalam aljabar linear. Matriks dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, transformasi geometris, analisis data, dan lainnya. Notasi Matriks: Matriks sering ditulis dengan huruf kapital, seperti A, B, atau C, terdiri dari elemen-elemen yang ditulis dalam bentuk baris dan kolom. Misalnya, matriks A berukuran mxn memiliki m baris dan n kolom, dengan elemen-elemen yang terdapat didalamnya adalah a_{ij}yang menunjukkan elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{n_1}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{n_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{m_1}} & \boldsymbol{a_{m_2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{mn}} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Dalam artikel ini, akan dibahas mengenai perbandingan antara tiga metode dekomposisi matriks, dekomposisi matriks merupakan sebuah konsep penting dalam aljabar linier yang memiliki berbagai aplikasi dalam ilmu komputer, analisis data, dan komputasi numerik. Dekomposisi matriks mengacu pada proses pemecahan suatu matriks menjadi beberapa matriks yang lebih sederhana, dengan tujuan untuk mempermudah pemahaman, analisis, dan perhitungan yang terkait. Melalui dekomposisi ini, kita dapat mengurai suatu matriks yang kompleks menjadi bagian-bagian yang lebih mudah diolah, namun tetap mempertahankan informasi yang terkandung di dalamnya. Konsep ini menjadi sangat relevan, khususnya dalam memecahkan sistem persamaan linier, pengolahan citra, dan berbagai perhitungan teknis lainnya. Dalam pembahasan ini, kami akan mengulas beberapa teknik dekomposisi yang paling banyak digunakan, serta aplikasinya yang luas dalam berbagai disiplin ilmu. Gambar 1 merupakan *flowchart* dekomposisi matriks.



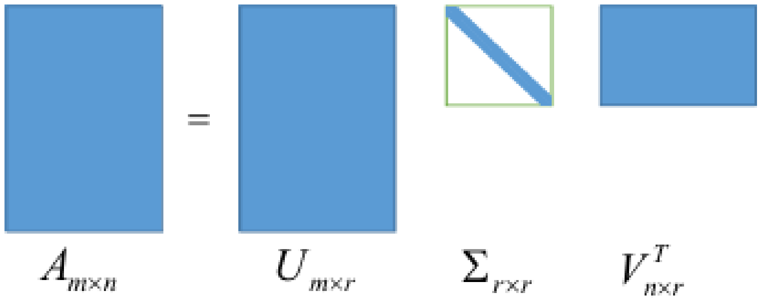
Gambar 1. Flowchart Dekomposisi matriks

2.1 *Singular Value Decomposition* (SVD)

Singular value decomposition merupakan salah satu teknik dekomposisi matriks dalam aljbar liner yang digunakan untuk menganalisis matriks menjadi beberapa komponen. Dalam SVD matriks A_{mxn} diuraikan menjadi

$$A = USV^T \quad (2)$$

Misalkan sebuah matriks A_{mxn} dengan rank $r \leq n \leq m$, dimana nilai eigen dari matriks A^TA adalah λ_i untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dengan n adalah jumlah nilai eigen, nilai singular dari matriks A adalah $\tau_i = \sqrt{\lambda_i}$ dan v_i merupakan vektor eigen dari matriks A^TA. Matriks U merupakan matriks orthogonal berukuran $m\ x\ m$ yang berisi vektor-vektor eigen dari matriks AA^T, matriks ini disebut sebagai *left singular vektor.* S merupakan matriks diagonal berukuran $m\ x\ n$ yang diagonalnya merupakan nilai singular dari matriks A yaitu $\tau_i = \sqrt{\lambda_i}$. V^T merupakan transpos dari matriks orthogonal V berukuran $n\ x\ n$, yang berisi vektor-vektor eigen v_i, matriks ini disebut sebagai *right singular vectors*. Gambar 2 memberikan ilustrasi *Singular value decomposition.*



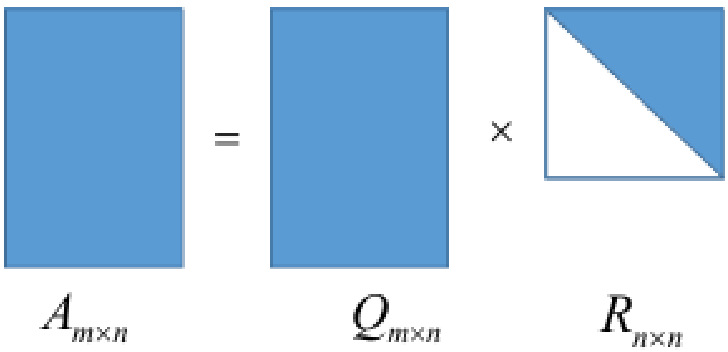
Gambar 2. *Singular Value Decompotition* (SVD)

2.2 Dekomposisi QR

Dekomposisi QR adalah metode yang digunakan untuk memfaktorkan matriks A berukuran mxn (dengan $m \geq n$) menjadi dua matriks Q dan R sedemikian sehingga $A = QR$. Matriks Q adalah matriks orthogonal dengan kolom- kolom yang ortonormal ($Q^TQ = I$), sedangkan R adalah matriks segitiga atas dimana elemen-elemen di bawah diagonal utama adalah nol. Untuk membentuk Q dan R, digunakan proses Gramm-Schimdt yang mengortonormalisasi kolom-kolom dari A. Misalkan A memiliki $a_1, a_2, \dots, a_n$. Proses ini dimulai dengan ortonormalisasi kolom pertama $q_1 = \frac{a_1}{||a_1||}$, dimana $||a_1||$ adalah norm Euclidean dari a_1. Kolom berikutnya diortonormalisasi dengan menghilangkan komponen yang sejajar dengan kolom-kolom yang sebelumnya dihasilkan, sehingga diperoleh q_k dengan persamaan:

$$u_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1}(q_j . a_k)q_j,\ q_k = \frac{u_k}{||u_k||}. \quad (3)$$

Setelah matriks Q dibentuk, matriks R diperoleh dengan $R = Q^TA$, dimana elemen-elemen r_{ij} dihitung sebagai $r_{ij} = q_i . a_j$ untuk $i \leq j$, memastikan matriks ini berbentuk segitiga atas. Jika kolom-kolom dari A berkolerasi tinggi, elemen-elemen di baris pertama r_{ij} dalam R akan memiliki nilai absolut yang besar, sedangkan elemen-elemen di baris lainnya cenderung mendekati nol. Hal ini disebabkan proyeksi yang dihasilkan dalam proses Gramm-Schmidt melemah pada kolom-kolom berikutnya, yang menyebabkan elemen-elemen r_{ij} untuk $i > 1$ menjadi kecil (ilustrasi terdapat pada Gambar 3).



Gambar 3. Dekomposisi QR

2.3 Dekomposisi LU

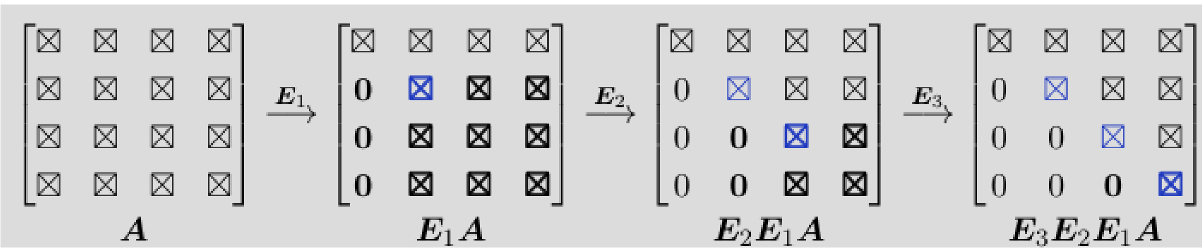
Dekomposisi LU adalah teknik dalam aljabar linear yang digunakan untuk memecah sebuah matriks persegi A menjadi hasil perkalian dua matriks: satu matriks segitiga bawah (L) dan satu matriks segitiga atas (U). Dengan kata lain, LU dekomposisi adalah representasi matriks A dalam bentuk:

$$A = LU \tag{4}$$

Matriks L adalah matriks segitiga bawah, yang memiliki elemen-elemen non-zero di bawah diagonal utama dan elemen-elemen di diagonal utama adalah 1. U adalah matriks segitiga atas, yang memiliki elemen-elemen *non-zero* di atas diagonal utama dan elemen-elemen di diagonal utama bebas. Misalkan A adalah sebuah matriks persegi berukuran $n\ x\ n$. Sebuah submatriks berukuran $k\ x\ k$ yang diperoleh dengan menghapus $n - k$ baris yang sama dari A disebut sebagai submatriks utama urutan ke-k dari A. Determinan dari submatriks utama berukuran $k\ x\ k$ disebut sebagai minor utama urutan ke-k dari A.

Tidak semua matriks persegi dapat didekomposisi menjadi LU, namun syarat yang umum untuk adanya dekomposisi LU adalah matriks tersebut harus *non-singular* (tidak memiliki determinan 0). Dekomposisi $PA = LU$, dapat digunakan untuk menangani kasus di mana dekomposisi LU standar tidak bisa diterapkan langsung. Proses dekomposisi LU dilakukan melalui eliminasi Gauss, yang merupakan langkah-langkah seperti berikut:

- Transformasi Matriks A ke bentuk segitiga atas (U): Ini dilakukan dengan operasi baris elementer untuk menghilangkan elemen-elemen di bawah diagonal utama.
- Matriks L Diperoleh: Selama proses tersebut, koefisien yang digunakan untuk mengeliminasi elemen-elemen di bawah diagonal utama akan membentuk matriks segitiga bawah L.



Gambar 4. Dekomposisi LU

Tabel 1. Perbedaan Antara 3 Metode dalam Dekomposisi matriks

No.	Judul	Metode	Tahun Publikasi	Referensi
1	*IMPLEMENTATION OF SINGULAR VALUE DECOMPOSITION FOR ADDING WATERMARK ON TEXT DOCUMENTS*	*Singular Value Decomposition* (SVD)	2022	(Sinurat et al., 2022)
2	*A blind dual color images watermarking based on singular value decomposition*	*Singular Value Decomposition* (SVD)	2013	(Su et al., 2013)

No.	Judul	Metode	Tahun Publikasi	Referensi
3	*Medical image encryption algorithm based on a new five-dimensional multi-band multi-wing chaotic system and Dekomposisi QR*	Dekomposisi QR	2024	(Zhuang et al., 2024)
4	DEKOMPOSISI QR DENGAN MATRIKS *TRANSFORMASI HOUSEHOLDER*	Dekomposisi QR	2022	(Nawaty et al., 2022)
5	*Intrusion detection of manifold regularized broad learning system based on LU decomposition*	Dekomposisi LU	2023	(Y. Liu et al., 2023)
6	*A color image watermarking framework for copyright protection of stereo images based on binocular just noticeable difference and LU decompotition*	Dekomposisi LU	2021	(Muñoz-Ramírez et al., 2021)

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada penelitian Sinurat *et al.* (2022) digunakan SVD untuk menambahkan *watermark* pada dokumen. Rumus SVD diterapkan untuk mengidentifikasi dokumen, yaitu penyisipan (*encoding*) *watermark* pada dokumen dan ekstraksi (*decoding*). SVD diterapkan pada dokumen untuk menetukan nilai singular yang dimodifikasi dengan menggunakan *watermark*, kemudian SVD digunakan kembali pada matriks yang dihasilkan untuk menghitung nilai *singular* yang dimodifikasi. Nilai *singular* yang dimodifikasi diperoleh dari penjumlahan nilai singular terhadap matriks dari *watermark*. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa citra *watermark* dapat diperoleh dengan ekstraksi nilai *Singular* yang dimodifikasi kepada matriks yang merepresentasikan dokumen awal. Tingkat kekuatan pada *watermark* yang dihasilkan pada penelitian ini bergantung pada nilai alpha atau faktor intensitas yang digunakan saat menentukan nilai singular yang dimodifikasi. Perancangan aplikasi *watermark* dengan rumus SVD ini dapat membantu pengguna melekatkan *watermark* dan memastikan kepemilikan dokumen. Sedangkan pada penelitian Su *et al*. (2013) mereka membuat skema *blind watermarking* berdasarkan SVD. Mereka berfokus pada matriks U hasil dekomposisi dimana mereka menemukan bahwa terdapat korelasi kemiripan yang kuat anatar elemen kolom pertama baris kedua dan elemen kolom pertama baris ketiga, property inilah yang dimanfaatkan untuk membuat *watermark*. Blok piksel yang tidak tumpeng tindih dari setiap komponen dalam gambar *host* warna diproses oleh SVD. Lalu *watermark* warna disematkan dengan sedikit modifikasi nilai dari elemen elemen yang memiliki kemiripan pada matriks U sebelumnya, sehingga relasi yang dimodifikasi dapat digunakan untuk mengekstrak *watermark*. Penelitian ini menunjukkan bahwa tanpa menggunkan gambar *watermark* asli dan *host* gambar asli, *watermark* yang disematkan dapat dengan mudah di ekstraksi. *Watermark* yang dihasilkan juga tembus pandang dan lebih kuat terhadap pemrosesan gambar yang umum.

Hasil tinjauan dari kedua jurnal mengenai dekomposisi QR menunjukkan peran penting dekomposisi QR dalam berbagai aplikasi yang berbeda namun saling melengkapi. Jurnal pertama (Zhuang *et al*., 2024) menyoroti penerapan dekomposisi QR dalam algoritma enkripsi citra yang memanfaatkan kombinasi matriks ortogonal dan urutan chaotic. Pendekatan ini terbukti meningkatkan tingkat keacakan dan ketahanan terhadap berbagai serangan, seperti analisis statistik dan analisis nilai abu-abu, sehingga memastikan keamanan yang lebih tinggi, khususnya pada citra medis. Di sisi lain, jurnal kedua (Nawaty *et al*., 2022) menyoroti penggunaan dekomposisi QR dalam konteks yang lebih mendasar, yaitu penyelesaian sistem persamaan linear (SPL). Dengan menggunakan transformasi Householder, dekomposisi ini memungkinkan penyelesaian SPL dengan lebih efisien, menghasilkan matriks ortogonal dan matriks segitiga atas yang memudahkan proses komputasi. Kedua pendekatan tersebut memperlihatkan fleksibilitas dekomposisi QR, baik dalam aplikasi praktis yang melibatkan keamanan data maupun dalam penyelesaian masalah matematika murni. Jurnal pertama memperlihatkan bagaimana dekomposisi QR, dengan kontrol perkalian kiri dan kanan menggunakan urutan chaotic, dapat mengoptimalkan aspek keamanan algoritma. Sementara itu, jurnal kedua menekankan stabilitas numerik yang dicapai dalam penyelesaian SPL, yang penting dalam analisis komputasi yang akurat. Integrasi pemahaman dari kedua jurnal ini menggambarkan bahwa dekomposisi QR tidak hanya berperan sebagai metode numerik dalam matematika tetapi juga sebagai komponen kunci dalam inovasi teknologi enkripsi yang aman. Keduanya menunjukkan bahwa aplikasi dekomposisi QR bisa diterapkan dengan cara yang sangat bervariasi, sesuai dengan kebutuhan spesifik bidang penelitian yang bersangkutan.

Pada penelitian Y. Liu *et al.* (2023) mengusulkan model deteksi intrusi berbasis *Manifold Regularized Broad Learning System* (MRBLS) dengan metode dekomposisi LU, yang disebut LU-MRBLS, untuk meningkatkan performa deteksi intrusi. Model ini memanfaatkan *Broad Learning System* (BLS) yang terkenal karena kecepatan dan efisiensi pemrosesannya. Namun, BLS memiliki kelemahan dalam mendeteksi struktur internal data, sehingga penelitian ini memperkenalkan MRBLS untuk mengatasi masalah tersebut dan menghindari optimisasi lokal. Dalam eksperimen menggunakan dataset KDD Cup99, NSL-KDD, UNSW-NB15, dan CIDDS-001, LU-MRBLS menunjukkan hasil deteksi yang lebih baik dibanding model pembelajaran mesin dan deteksi intrusi terkini. Model ini berhasil mengurangi waktu pelatihan, meningkatkan akurasi, dan mengatasi masalah nilai singular dalam matriks bobot keluaran, sehingga meningkatkan performa deteksi intrusi dalam berbagai skenario. Penelitian Muñoz-Ramírez *et al*. (2021) mengusulkan kerangka *watermarking* gambar warna untuk melindungi hak cipta gambar stereo berbasis *Binocular Just Noticeable Difference* (BJND) dan dekomposisi LU. Skema ini menyematkan *watermark* yang tidak terlihat pada saluran warna R, G, dan B dari gambar stereo, memastikan *watermark* tetap tersembunyi namun tangguh terhadap kompresi JPEG dan gangguan lainnya. Metode ini tidak memerlukan gambar asli untuk mengekstrak *watermark*, menjadikannya metode yang efisien dan tahan terhadap berbagai serangan tanpa mengurangi kualitas peta ketidakcocokan atau konten 3D yang dihasilkan.

Tinjauan dari kedua jurnal tentang dekomposisi LU mengungkapkan perannya yang signifikan dalam berbagai aplikasi, yang meskipun berbeda, memiliki fungsi yang saling melengkapi. Pada jurnal pertama (Y. Liu *et al*., 2023), dekomposisi LU diterapkan dalam MRBLS untuk keperluan deteksi intrusi. Penggunaan dekomposisi LU dalam konteks ini mempercepat proses pelatihan dan meningkatkan kestabilan komputasi, khususnya dalam menangani singularitas pada matriks keluaran, sehingga mampu meningkatkan akurasi dan efisiensi model deteksi. Sebaliknya, jurnal kedua (Muñoz-Ramírez *et al*., 2021) membahas dekomposisi LU dalam skema *watermarking* untuk gambar stereo, dengan model BJND sebagai dasar perlindungan hak cipta. Di sini, dekomposisi LU digunakan untuk menyisipkan *watermark* warna yang tidak terlihat dalam gambar, sehingga *watermark* tetap tersembunyi tanpa menurunkan kualitas gambar maupun kedalaman stereoskopik. Metode ini juga membuat *watermark* tahan terhadap kompresi JPEG dan gangguan lainnya, memperkuat perlindungan data visual. Kedua aplikasi ini menunjukkan bahwa dekomposisi LU dapat diterapkan secara fleksibel untuk memenuhi kebutuhan yang sangat berbeda: di satu sisi untuk meningkatkan kestabilan dan efisiensi dalam analisis data besar, dan di sisi lain untuk memastikan ketahanan *watermark* dalam perlindungan hak cipta visual. Sementara jurnal pertama menyoroti peran LU dalam stabilitas numerik untuk pemrosesan data, jurnal kedua menekankan integritas *watermark* melalui pemanfaatan LU. Secara keseluruhan, kedua studi ini memperlihatkan bahwa dekomposisi LU tidak hanya berfungsi sebagai teknik komputasi, tetapi juga sebagai elemen penting dalam pengembangan teknologi yang berorientasi pada keamanan di berbagai bidang data.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil tinjauan beberapa jurnal, dapat disimpulkan bahwa metode dekomposisi matriks seperti *Singular Value Decomposition* (SVD), dekomposisi QR, dan dekomposisi LU memiliki kontribusi signifikan dalam berbagai aplikasi yang melibatkan keamanan data, efisiensi komputasi, serta proteksi hak cipta. SVD, misalnya, diaplikasikan dalam teknik *watermarking* untuk memastikan ketahanan *watermark* yang disisipkan dalam dokumen atau citra. Fleksibilitas dan kemudahan SVD menjadikannya cocok untuk aplikasi yang memerlukan komputasi sederhana dan fleksibel. SVD memungkinkan modifikasi pada komponen matriks tanpa kehilangan kualitas data yang signifikan, sehingga ideal untuk analisis citra dan teks yang membutuhkan kompresi atau pengurangan dimensi tanpa mengorbankan informasi penting. Dekomposisi QR unggul dalam aplikasi yang membutuhkan stabilitas numerik dan presisi tinggi, seperti pemecahan SPL dan enkripsi citra. Dengan membagi matriks menjadi matriks ortogonal dan segitiga atas, QR mampu mempertahankan kestabilan hasil komputasi, menjadikannya pilihan yang optimal untuk perhitungan yang membutuhkan keakuratan tinggi, seperti pada aplikasi kriptografi dan sistem kendali. Temuan ini menunjukkan bahwa SVD dan QR memiliki fleksibilitas dalam mendukung aplikasi yang memerlukan perlindungan data sekaligus keakuratan dalam perhitungan matematis.

Selain itu, dekomposisi *LU* berperan krusial dalam deteksi intrusi serta proteksi hak cipta pada citra digital. Dalam model deteksi intrusi, LU digunakan untuk meningkatkan stabilitas komputasi dengan mengatasi masalah singularitas pada matriks bobot keluaran, sementara dalam teknik *watermarking*, LU memungkinkan penyisipan *watermark* yang tidak terlihat namun tetap kuat terhadap kompresi JPEG dan gangguan lainnya pada citra stereo. LU juga optimal untuk sistem persamaan linear besar, karena dekomposisinya memisahkan matriks ke dalam bentuk segitiga bawah (*Lower*) dan segitiga atas (*Upper*), yang memudahkan pemrosesan tanpa membalik matriks langsung, menjadikannya efisien dalam aplikasi seperti stabilitas dalam deteksi intrusi. Dengan demikian, setiap metode dekomposisi matriks memiliki fleksibilitas dan keunggulan spesifik yang memungkinkan penerapannya dalam memenuhi kebutuhan khusus terkait keamanan, efisiensi, dan ketahanan data. Dekomposisi matriks tidak hanya berfungsi dalam pemecahan masalah matematika murni, tetapi juga menjadi komponen penting dalam inovasi teknologi untuk perlindungan dan ketahanan data di berbagai bidang penelitian.

5. DAFTAR PUSTAKA

Aazmi, A., Zhang, D., Mazzaglia, C., Yu, M., Wang, Z., Yang, H., Huang, Y. Y. S., & Ma, L. (2024). Biofabrication methods for reconstructing extracellular matrix mimetics. *Bioactive Materials*, *31*, 475–496.

Breaz, S., & Rafiliu, C. (2023). Decompositions of matrices by using commutators. *Linear Algebra and Its Applications*, *662*, 39–48.

Bru, R., Gassó, M. T., Giménez, I., Santana, M., & Scott, J. (2023). Combined matrix of diagonally equipotent matrices. *Special Matrices*, *11*(1), 1-11.

Cao Thi, T.-X. (2023). Singular value decomposition and applications in data processing and artificial intelligence. *HPU2 Journal of Science: Natural Sciences and Technology*, *2*(3), 34–41.

Chen, C. S., Karageorghis, A., & Lei, M. (2024). Local MFS matrix decomposition algorithms for elliptic BVPs in annuli. *Numerical Mathematics*, *17*(1), 93–120.

Deng, Y., Chang, Q., Chang, H., Liu, W., Ma, P., Zhou, P., & Jiang, Z. (2023). Analysis of an image noise sensitivity mechanism for matrix-operation-mode-decomposition and a strong anti-noise method*. Optics Express, 31(8), 12299.*

Dubiel, E. A., Myler, H., Arnold, M. E., Bennett, P., Gatz, J., Groeber, E., Gupta, S., Kane, C., Li, F., Mylott, W., Noah, C., O'Dell, M., Tewalt, E., Warrino, D., & Vick, A. (2022). Biological matrix supply chain shortages: more matrices are now rare—the case for surrogate matrices. *AAPS Journal*, *24*(2), 1–6.

Fan, K., Huang, Z., Zeng, J., & Wu, W. (2022). High-fidelity tensor-decomposition based matrix formation for isogeometric buckling analysis of laminated shells with solid-shell formulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 123*(21), 5230–5273.

Fidalgo-Pereira, R., Catarino, S. O., Carvalho, Ó., Veiga, N., Torres, O., Braem, A., & Souza, J. C. M. (2024). Light transmittance through resin-matrix composite onlays adhered to resin-matrix cements or flowable composites. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials, 151,* 106353.

Gidisu, P. Y., & Hochstenbach, M. E. (2024). *A restricted SVD type cur decomposition for matrix triplets*. *SIAM Journal on Scientific Computing*, *46*(2), S401–S423.

Guo, Q., Tian, Y., Qi, L., Wang, Y., Li, D., & Kaliuzhnyi, M. (2024). *A SAR multiple RFI suppression method via frobenius norm and iterative matrix decomposition. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, *17*, 3927–3939.

Huda, M. A., Wahiduzzaman, M., & Ara, M. (2022). Matrix factorization, decomposition and splitting methods and its applications in physical problems. *Khulna University Studies*, *19*(2), 141-153.

Jalali, Z. S., Wang, C., Kearney, G., Yuan, G., Ding, C., Zhou, Y., Wang, Y., & Soundarajan, S. (2023). Memristor-based spectral decomposition of matrices and its applications. *IEEE Transactions on Computers*, *72*(5), 1460–1472.

Le Borne, S. (2023). A block Cholesky-LU-based QR factorization for rectangular matrices. *Numerical Linear Algebra with Applications*, *30*(5), 1–10.

Li, M., & Li, J. (2024). Microexpression recognition model based on non negative matrix decomposition in intelligent classroom. *Intelligent Systems with Applications*, *22*, 200343.

Liu, Q., Peng, C., Yang, P., Zhou, X., & Liu, Z. (2023). A fast matrix completion method based on matrix bifactorization and QR decomposition. *Wireless Communications and Mobile Computing*, *2023*(1), 1-12.

Liu, Y., Zhang, K., & Wang, Z. (2023). Intrusion detection of manifold regularized broad learning system based on LU decomposition. *Journal of Supercomputing*, *79*(18), 20600–20648.

Ma, J., Liu, Q., Zhang, Z., & Gu, P. (2024). Research on personalized recommendation of teaching resources based on joint probability matrix decomposition model and CNN improvement algorithm. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, *9*(1), 1–16.

Marco, A., Martínez, J. J., & Viaña, R. (2024). Accurate bidiagonal decomposition of Lagrange–Vandermonde matrices and applications*. Numerical Linear Algebra with Applications*, *31*(1), 1–16.

Muñoz-Ramírez, D. O., García-Salgado, B. P., Ponomaryov, V., Reyes-Reyes, R., Sadovnychiy, S., & Cruz-Ramos, C. (2021). A color image watermarking framework for copyright protection of stereo images based on binocular just noticeable difference and LU decomposition*. Multimedia Tools and Applications*, *80*(9), 13707–13734.

Nawaty et al. (2022). Dekomposisi Qr dengan matriks. *Transformasi Householder*, *11*(2), 229–238.

Ni, Y. Y., Wu, F. Y., & Yang, H. Z. (2024). An automatic threshold OMP algorithm based on QR decomposition for magnetic resonance image reconstruction. *Circuits, Systems, and Signal Processing, 43*(6), 3697–3717.

Respondek, J. (2022). Matrix black box algorithms - a survey*. Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, *70*(2), 1–8.

Savenkov, S., Oberemok, Y., Kolomiets, I., Muttiah, R., & Kurylenko, R. (2024). Mueller-polarimetry of barley leaves ii: mueller matrix decompositions*. Photonics*, *11*(76), 1-27.

Shmueli, S., Drineas, P., & Avron, H. (2024). Low-rank updates of matrix square roots. *Numerical Linear Algebra with Applications*, *31*(1), 1–15.

Sinurat et al. (2022). Implementation of singular value decomposition for adding watermark on text Documents. *Infokum, 10*(2), 750–757.

Su, Q., Niu, Y., Zou, H., & Liu, X. (2013). A blind dual color images watermarking based on singular value decomposition. *Applied Mathematics and Computation*, *219*(16), 8455–8466.

Sun, L., Wu, B., & Ye, T. (2020). Design and VLSI implementation of a reduced-complexity sorted QR decomposition for high-speed MIMO systems*. Electronics (Switzerland)*, *9*(10), 1–15.

Xu, S., & Pan, C. (2024). Deep learning algorithm-oriented blended teaching in secondary school mathematics courses in ethnic areas*. Applied Mathematics and Nonlinear*

Sciences, 9(1), 1–14.

Yang, Q., & Peng, X. (2023). A fast calculation method for sensitivity analysis using matrix decomposition technique. *Axioms*, *12*(2), 1–13.

Zhu, Y., & Wei, Y. (2022). Tensor LU and QR decompositions and their randomized algorithms. *Computational Mathematics and Computer Modeling with Applications (CMCMA)*, *1*(1), 1–16.

Zhuang, Z., Zhuang, Z., & Wang, T. (2024). Medical image encryption algorithm based on a new five-dimensional multi-band multi-wing chaotic system and QR decomposition. *Scientific Reports*, *14*(1), 1–17.