KEKONVERGENAN LEMAH PADA RUANG HILBERT

Moch. Ramadhan Mubarak[1)], Encum Sumiaty[2)], Cece Kustiawan[3)]

[1), 2), 3)] Departemen Pendidikan Matematika FPMIPA UPI

*Surel: ramadhan.101110176@gmail.com

ABSTRAK. Penelitian ini mengkaji mengenai kekonvergenan lemah pada ruang Hilbert atas lapangan real. Kekonvergenan lemah termotivasi oleh kekonvergenan kuat sehingga terdapat beberapa sifat dari kekonvergenan kuat yang berlaku pada kekonvergenan lemah seperti ketunggalan limit, kelinearan limit, dan keterbatasan suatu barisan. Keterkaitan antara konvergen kuat dan lemah mengakibatkan terdapat pendefinisian dan sifat-sifat dari barisan Cauchy lemah dan himpunan kompak secara barisan dan secara lemah. Di akhir pembahasan dibicarakan mengenai keberlakuan Teorema Bolzano-Weierstrass pada ruang Hilbert.

Kata kunci: Ruang Hilbert, konvergen kuat, konvergen lemah, himpunan kompak secara barisan dan secara lemah, teorema Bolzano-Weiertrass.

ABSTRACT. This study discusses the weak of convergence in Hilbert space over the real field. The weak of convergence is motivated by a strong convergence as a result that there are some properties of the strong convergence which is applicable in the weak of convergence such as uniqueness of limit, linearity of limit, and boundedness of a sequence. The relationship between strong and weak convergent implies that there are the definition and properties of weak Cauchy sequence and weakly compact set. In the end of the discussion discussed about the generalize of Bolzano-Weierstrass theorem in Hilbert space.

Keywords: Hilbert Space, strong convergence, weak convergence, weakly compact set, Bolzano-Weierstrass Theorem.

1. PENDAHULUAN

Ruang Hilbert H yang dilengkapi dengan $\|\cdot\|$ merupakan ruang vektor bernorma. Pada ruang Hilbert H dapat didefinisikan dua topologi, topologi norma atau topologi kuat dan topologi lemah. Topologi lemah lebih lemah dari topologi kuat [1]. Kekonvergenan pada topologi kuat atau konvergen secara kuat memiliki beberapa sifat, diantaranya sifat ketunggalan limit, keterbatasan barisannya, kelinearan dan sebagainya [2]. Dari uraian tersebut, dibahas sifat-sifat kekonvergenan pada topologi lemah.

Teorema Bolzano-Weierstrass menyatakan bahwa setiap barisan real terbatas memiliki subbarisan yang konvergen secara kuat. Teorema tersebut berlaku untuk setiap ruang berdimensi hingga yang dilengkapi dengan hasil kali dalam. Contohnya $\mathbb{R}^n$. Namun, teorema tersebut tidak berlaku untuk sebarang ruang berdimensi takhingga. Diberikan suatu ruang Hilbert H. Misalkan $\{e_n\}$ adalah barisan ortonormal di H dan $\{e_{n_k}\}$ adalah sebarang subbarisan dari $\{e_n\}$. Perhatikan bahwa $\|e_n\| = 1$ dan

$$\left\|e_{n_k} - e_{n_j}\right\|^2 = \langle e_{n_k} - e_{n_j}, e_{n_k} - e_{n_j}\rangle = \left\|e_{n_k}\right\|^2 + \left\|e_{n_j}\right\|^2 = 1 + 1 = 2.$$

Akibatnya $\{e_{n_k}\}$ bukan barisan Cauchy. Perhatikan bahwa $\{e_{n_k}\}$ adalah barisan di H dan H lengkap. Dengan demikian Teorema Bolzano-Weierstrass tidak berlaku pada ruang Hilbert H. Lalu, bagaimana keberlakuan Teorema Bolzano-Weierstrass pada ruang Hilbert jika pendefinisian kekonvergenannya pada topologi lemah?.

2. KEKONVERGENAN LEMAH

Diberikan sebuah ruang Hilbert H maka perhatikan bahwa untuk setiap $g \in H$ dan untuk barisan ortonormal $\{e_n\}$ berlaku ketaksamaan Bessel $\sum_n^\infty |\langle e_n, g\rangle| \leq \|g\|$ [2]. Akibatnya $\lim_{n\to\infty} \langle e_n, g\rangle = 0 = \langle \mathbf{0}, g\rangle$ untuk setiap $g \in H$. Berdasarkan hal tersebut, berikut ini adalah definisi dari kekonvergenan lemah pada ruang Hilbert.

Definisi 2.1

Sebuah barisan $\{x_n\}$ di ruang Hilbert H dikatakan konvergen secara lemah ke $x \in H$ jika $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, g\rangle = \langle x, g\rangle$ untuk setiap $g \in H$. Ditulis dengan notasi $x_n \rightharpoonup x$.

Contoh 2.2

Misalkan $\{e_n\}$ barisan ortonormal di ruang Hilbert H. Berdasarkan ketaksamaan Bessel, untuk setiap $x \in H$ berlaku $\sum_n^\infty |\langle e_n, x\rangle| \leq \|x\|$. Dengan demikian, untuk setiap $x \in H$, $\sum_n^\infty |\langle e_n, x\rangle| \to \|x\|$. Akibatnya, untuk setiap $x \in H$, $\lim_{n\to\infty} \langle e_n, x\rangle = \langle 0, x\rangle$. Berdasarkan definisi $e_n \rightharpoonup \mathbf{0}$ ∎

Definisi 2.3

Sebuah elemen y dikatakan limit lemah dari sebuah himpunan M jika $\langle x, y\rangle$ adalah titik limit dari $\langle x, M\rangle$ untuk setiap $x \in H$.

Definisi 2.4

Sebuah himpunan M dikatakan tertutup lemah jika memuat semua limit lemahnya.

Selanjutnya akan disajikan beberapa teorema mengenai sifat kekonvergenan lemah. Teorema-teorema tersebut menggunakan kelinearan dari ruang hasil kali dalam [2] dan kelinearan dari limit.

Teorema 2.5

Jika suatu barisan di ruang Hilbert H konvergen secara lemah, maka limit lemahnya tunggal.

Bukti.

Diberikan sebuah ruang Hilbert H. Misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan di ruang Hilbert H yang konvergen secara lemah. Andaikan limit lemah dari $\{x_n\}$ tidak tunggal, misalkan $x_n \rightharpoonup x$ dan $x_n \rightharpoonup y$. Selanjutnya berdasarkan Definisi 2.1,

$$\langle x, g\rangle = \lim\langle x_n, g\rangle = \langle y, g\rangle.$$

Sehingga diperoleh

$$\langle x, g\rangle = \langle y, g\rangle.$$

Dari persamaan diatas diperoleh

$$\langle x - y, g\rangle = 0 = \langle \mathbf{0}, g\rangle.$$

Akibatnya, $x = y$. Jadi limit lemah dari $\{x_n\}$ tunggal. ■

Teorema 2.6

Misalkan $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ adalah barisan di ruang Hilbert H. Jika $x_n \rightharpoonup x$ dan $y_n \rightharpoonup y$ maka $ax_n + by_n \rightharpoonup a \quad + b \quad$ untuk setiap skalar a, b.

Teorema 2.7

Misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan yang konvergen secara lemah ke x di ruang Hilbert H, maka setiap subbarisan dari $\{x_n\}$ konvergen secara lemah ke x.

Teorema 2.8

Misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan yang konvergen secara lemah yang konvergen ke x di ruang Hilbert H, maka barisan $\{x_n\}$ terbatas.

3. KETERKAITAN KONVERGEN KUAT DAN LEMAH

Sebagaimana telah di singgung di muka, topologi lemah lebih lemah dari topologi kuat, artinya semua himpunan buka yang didefinisikan pada topologi lemah juga termuat pada topologi kuat, namun tidak sebaliknya. Oleh karena itu timbul dugaan adanya keterkaitan antara konvergen kuat dan konvergen lemah.

Teorema 3.1

Jika $\{x_n\}$ konvergen ke x, maka $\{x_n\}$ konvergen secara lemah ke x.

Bukti.
Perhatikan bahwa $x_n \to x$, artinya $\|x_n - x\| \to 0$
Dengan demikian,

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n - x, y\rangle| \\ &\leq \|x_n - x\|\|y\| \to 0 \text{ untuk } n \to \infty \end{aligned}$$

Maka diperoleh bahwa $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$.
Berdasarkan definisi kekonvergenan lemah, maka $x_n \rightharpoonup x$. ■

Jika Teorema 3.1 menyatakan konvergen kuat selalu mengakibatkan konvergen lemah, namun tidak sebaliknya. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.2

Diberikan $\{e_n\}$ adalah barisan ortonormal di ruang Hilbert H. Contoh 2.2 menunjukan bahwa $e_n \rightharpoonup \mathbf{0}$. Karena $\{e_n\}$ adalah barisan ortonormal di H dan $\|e_n\| = 1$ akibatnya $\{e_n\}$ tidak konvergen secara kuat ke $\mathbf{0}$. ■

Selanjutnya, diberikan beberapa teorema yang menunjukan keterkaitan konvergenan lemah dan kuat.

Teorema 3.3

Misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan di ruang Hilbert H yang konvergen secara lemah ke x dan $\|x_n\|$ konvergen secara kuat ke $\|x\|$, maka $\{x_n\}$ konvergen secara kuat ke x.

Bukti.
Perhatikan bahwa

$$\|x_n - x\|^2 = \langle x_n - x, x_n - x\rangle = \|x_n\|^2 - \langle x_n, x\rangle - \langle x, x_n\rangle + \|x\|^2$$

Selanjutnya, karena $x_n \rightharpoonup x$, maka $\forall x \in H$

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, x\rangle = \langle x, x\rangle.$$

Dan karena $\|x_n\| \to \|x\|$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 &= \lim_{n\to\infty} (\|x_n\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 + \|x\|^2) \\ &= \|x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 + \|x\|^2 = 0 \end{aligned}$$

Akibatnya, $x_n \to x$. ■

Teorema 3.4

Misalkan $\{x_n\}$ suatu barisan di ruang Hilbert H yang konvergen secara lemah ke x. Jika H berdimensi hingga, maka barisan $\{x_n\}$ konvergen secara kuat ke x.

Lemma 3.5

Misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan di ruang Hilbert H. Misalkan pula $\{x_{n_k}\}$ adalah subbarisan dari $\{x_n\}$. Jika setiap subbarisan $\{x_{n_{k_r}}\}$ dari $\{x_{n_k}\}$ konvergen secara kuat ke x, maka $\{x_n\}$ konvergen secara kuat ke x.

Teorema 3.6

Jika $\{x_n\}$ adalah barisan di ruang Hilbert H yang termuat di dalam himpunan kompak, dan $\{x_n\}$ konvergen secara lemah ke x, maka $\{x_n\}$ konvergen secara kuat ke x.

Bukti:

Diberikan suatu ruang Hilbert H dan S adalah himpunan kompak. Misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan di ruang Hilbert H dan $\{x_n\} \square S$ dan misalkan pula $\left\{x_{n_k}\right\}$ sebarang subbarisan dari $\{x_n\}$. Karena $\left\{x_{n_k}\right\}$ adalah subbarisan dari $\{x_n\}$ maka $\left\{x_{n_k}\right\} \square S$. Karena $\left\{x_{n_k}\right\} \square S$, maka setiap $\left\{x_{n_k}\right\}$ memiliki subbarisan $\left\{x_{n_{k_r}}\right\}$ yang konvergen secara kuat. Misalkan $\left\{x_{n_{k_r}}\right\} = \{z_n\}$ yang konvergen secara kuat ke z. Berdasarkan Teorema 3.1, maka $\{z_n\}$ konvergen secara lemah ke z.

Selanjutnya, diketahui bahwa $\{x_n\}$ konvergen secara lemah ke x. Berdasarkan Teorema 2.7 diperoleh bahwa $\left\{x_{n_{k_r}}\right\} = \{z_n\}$ konvergen secara lemah ke x. Karena sebelumnya diketahui bahwa $z_n \square z$, berdasarkan Teorema 2.5 maka $z = x$. Akibatnya $z_n \rightarrow x$. Selanjutnya berdasarkan Lemma 3.5 diperoleh bahwa $x_n \square x$.

4. KRITERIA CAUCHY LEMAH

Sebuah barisan di ruang vektor bernorma dikatakan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N = N(\varepsilon)$ sedemikian sehingga $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$,untuk setiap $m, n > N$ [3]. Karena ruang Hilbert merupakan ruang vektor bernorma, maka definisi barisan Cauchy tersebut juga berlaku di ruang Hilbert. Dengan memperhatikan definisi tersebut, akan diberikan sebuah definisi mengenai barisan Cauhcy yang lemah.

Definisi 4.3.1

Suatu barisan $\{x_n\}$ di ruang Hilbert H dikatakan barisan Cauchy yang lemah jika $\{\square x_n, g\square\}$ merupakan barisan Cauchy untuk setiap $g \square H$.

Dalam topologi kuat suatu barisan Cauchy bilangan real terbatas. Lalu bagaimana untuk barisan Cauhcy pada topologi lemah?.

Teorema 4.3.2

Setiap barisan Cauchy yang lemah di ruang Hilbert terbatas

Bukti.

Misalkan $\{x_n\}$ adalah sebarang barisan Cauchy yang lemah di ruang Hilbert H. Berdasarkan definisi diperoleh $\{\square x_n, g\square\}$ barisan Cauchy untuk setiap $g \square H$. Karena $\{\square x_n, g\square\}$ di H dan H lengkap maka $\{\square x_n, g\square\}$ konvergen secara kuat.

Akibatnya $\{\langle x_n, g\rangle\}$ terbatas. Dengan demikian $\{x_n\}$ terbatas. Karena $\{x_n\}$ diambil sebarang, maka teorema tersebut terbukti.

Dalam topologi kuat suatu barisan Cauchy konvergen secara kuat. Teorema berikut juga menunjukan bahwa barisan Cauchy yang lemah juga konvergen secara lemah.

Teorema 4.3.3

Setiap barisan Cauchy yang lemah di ruang Hilbert konvergen secara lemah.

Bukti.

Misalkan $\{x_n\}$ adalah sebarang barisan Cauchy yang lemah di ruang Hilbert H. Berdasarkan definisi diperoleh $\{\langle x_n, g\rangle\}$ barisan Cauchy untuk setiap $g \in H$. Karena $\{\langle x_n, g\rangle\}$ di H dan H lengkap $\{\langle x_n, g\rangle\}$ konvergen secara kuat. Katakanlah konvergen secara kuat ke $\langle x, g\rangle$ atau ditulis $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, g\rangle = \langle x, g\rangle$ untuk setiap $g \in H$. Berdasarkan Definisi 2.1 maka $\{x_n\}$ konvergen secara lemah ke x. Karena $\{x_n\}$ diambil sebarang maka teorema tersebut terbukti.

5. KEKOMPAKAN SECARA BARISAN DAN KEKOMPAKAN SECARA LEMAH

Misalkan himpunan M kompak secara barisan maka setiap barisan $\{x_n\}$ di M memiliki subbarisan $\{x_{n_k}\}$ yang konvergen secara kuat ke suatu titik di M. Di lain pihak, Teorema 3.1 menunjukan bahwa kekonvergenan kuat mengakibatkan kekonvergenan lemah. Akibatnya $\{x_{n_k}\}$ konvergen secara lemah ke titik yang sama di M. Dengan demikian, kekompakan juga mengakibatkan kekompakan secara barisan dan secara lemah.

Definisi 5.1

Misalkan M adalah subhimpunan dari suatu ruang Hilbert H. Subhimpunan M dikatakan kompak secara barisan dan secara lemah jika setiap barisan di M memiliki subbarisan yang konvergen secara lemah ke suatu titik di M.

Himpunan kompak secara barisan mengakibatkan keterbatasan [2]. Kekompakan secara barisan dan secara lemah juga mengakibatkan keterbatasan. Teorema berikut menunjukan hal tersebut.

Teorema 5.2

Setiap subhimpunan dari suatu ruang Hilbert yang kompak secara barisan dan secara lemah adalah terbatas.

Bukti.

Diberikan suatu ruang Hilbert H. Misalkan M adalah himpunan yang kompak secara barisan dan secara lemah di H. Akan ditunjukan bahwa M terbatas.

Andaikan M tidak terbatas, sehingga terdapat barisan $\{x_n\}$ di M sedemikian sehingga $\|x_n\| \geq N$ untuk setiap $N \in \mathbb{N}$. Akibatnya $\{x_n\}$ tidak memiliki subbarisan yang konvergen karena subbarisan yang konvergen haruslah terbatas. Hal ini kontradiksi dengan M himpunan kompak secara barisan dan secara lemah, maka haruslah M terbatas. ■

Pada sebarang ruang Hilbert Teorema Bolzano-Weierstrass tidak berlaku jika pendefinisian kekonvergenannya secara kuat. Hal tersebut ditunjukan oleh contoh berikut.

Contoh 5.3

Diberikan suatu ruang Hilbert H. Misalkan $\{e_n\}$ adalah barisan ortonormal di H dan $\{e_{n_k}\}$ adalah sebarang subbarisan dari $\{e_n\}$. Akan ditunjukan Teorema Bolzano-Weierstrass tidak berlaku jika pendefinisian kekonvergenannya secara kuat. Perhatikan untuk setiap $j \neq k$.

$$\begin{aligned}
\left\|e_{n_k} - e_{n_j}\right\|^2 &= \langle e_{n_k} - e_{n_j}, e_{n_k} - e_{n_j}\rangle \\
&= \left\|e_{n_k}\right\|^2 - \langle e_{n_k}, e_{n_j}\rangle - \langle e_{n_j}, e_{n_k}\rangle + \left\|e_{n_j}\right\|^2 \\
&= 1 - 0 - 0 + 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh bahwa $\left\|e_{n_k} - e_{n_j}\right\| = \sqrt{2}$. Akibatnya $\{e_{n_k}\}$ bukan barisan Cauchy. Perhatikan bahwa $\{e_{n_k}\}$ adalah barisan di H dan H lengkap. Dengan demikian Teorema Bolzano-Weierstrass tidak berlaku pada ruang Hilbert H. ■

Teorema 2.7 menjamin setiap barisan di ruang Hilbert selalu memiliki subbarisan yang konvergen secara lemah. Dengan demikian Teorema Bolzano-Weierstrass berlaku pada ruang Hilbert jika pendefinisian kekonvergenannya secara lemah. Berikut Teorema yang menunjukan hal itu.

Teorema 4.3.1

Setiap barisan terbatas di ruang Hilbert memuat subbarisan yang konvergen secara lemah.

Bukti.

Diberikan suatu ruang Hilbert H. Misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan terbatas di H, katakanlah $\|x_n\| \leq M$. Perhatikan bahwa barisan terbatas $\{\langle x, x_n\rangle\}$. Berdasarkan Teorema Bolzano Weiertrass, terdapat subbarisan $\{\langle x_1, x_{n_1}\rangle\}$ dari $\{\langle x, x_n\rangle\}$ yang konvergen secara kuat. Selanjutnya, perhatikan barisan $\{\langle x_2, x_{n_1}\rangle\}$. Berdasarkan Teorema Bolzano Weiertrass, terdapat subbarisan $\{\langle x_2, x_{n_2}\rangle\}$ dari $\{\langle x_2, x_{n_1}\rangle\}$ yang konvergen secara kuat. Dengan argumen yang serupa sampai dengan $\{x_{n_k}\}$, maka untuk setiap $k > m$, $\{\langle x_m, x_{n_k}\rangle\}$ konvergen secara kuat dan $\{\langle x_m, x_{n_k}\rangle\}$ adalah subbarisan dari $\{\langle x_m, x_{n_m}\rangle\}$ yang konvergen secara kuat. Selanjutnya definisikan

$$l(x) = \lim_{k\to\infty}\langle x, x_{n_k}\rangle$$

sedemikian sehingga limitnya ada untuk setiap $x \in H$.

Selanjutnya akan ditunjukan bahwa $l(\cdot)$ fungsional linear. Ambil sebarang $x, y \in H$ sehingga

$$l(\alpha \ \ + \beta \ \ ) = \lim_{k\to\infty}\langle\alpha \ \ + \beta \ \ , x_{n_k}\rangle = \alpha\ (x) + \beta\ (y).$$

Karena $x, y \in H$ diambil sebarang dan untuk setiap skalar α, β, maka $l(\cdot)$ fungsional linear. Selanjutnya akan ditunjukan $l(\cdot)$ terbatas. Ambil sebarang $y \in H$ maka terdapat barisan $\{y_n\} \in H$ sedemikian sehingga $\|y_n - y\| \to 0$ dan $y_n - y \in H$. Sehingga

$$\|l(y_n - y)\| = \lim_{k\to\infty}\left|\langle y_n - y, x_{n_k}\rangle\right| \leq M\|y_n - y\| \to 0$$

Karena $y_n - y \in H$ diambil sebarang, maka $l(\cdot)$ terbatas. Selanjutnya karena $l(\cdot)$ fungsioanl linear yang terbatas, berdasarkan Teorema Representasi Riesz [4] maka $l(x) = \langle x, h\rangle$ untuk setiap $h \in H$. Sehingga diperoleh

$$l(x) = \lim_{k\to\infty}\langle x, x_{n_k}\rangle = \langle x, h\rangle$$

untuk setiap $x \in H$ sehingga berdasarkan Definisi 2.1 maka $\{x_{n_k}\}$ konvergen secara lemah ke h. ■

6. REFERENSI

[1] H. Moscovich, “Norm, Strong, and Weak Operator Topologies on B (H),” 18 Mei 2009. [Online]. Available: u.math.biu.ac.il/~megereli/updated.pd. [Diakses 3 Oktober 2016].

[2] E. Kreyzig, Introduction to Functional Analysis and Its Applications, New York: John Wiley and Sons, 1978.

[3] A. L. Cauchy, Cours d'Analyse, 1821.

[4] A. V. Balakrishnan, Applications of Mathematics: Applied Functional Analysis, New York: Springer-Verlag, 1981.

[5] A. W. Roberts dan D. E. Varberg, Convex Functions, New York: Academic Press, Inc., 1973.

[6] R. Mukti, “Skripsi Kekonvergenan Lemah Pada Ruang Vektor Bernorma,” tidak diterbitkan, Bandung, 2010.

[7] D. H. Griffel, Applied Functional Analysis, New York: Dover Publications, Inc., 1981.

[8] M. A. M. Fereirra, “The Weak Convergence in Hilbert Spaces Concept Contruction,” *International Sciences and Computing*, 2014.

[9] R. G. Bartle., dan D. R. Sherbert, Introduction To Real Analysis, Urbana, Illinois, 2010.

[10] H. Anton, Aljabar Libear Elementer (Edisi Lima), Jakarta: Erlangga, 1987.