FPM PADA KELUARGA EKSPONENSIAL BENTUK KONONIK

Oleh :

Entit Puspita

Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pendidikan Indonesia

ABSTRACT

We can determine the distribution of the random variable by considering its moment generating function (MGF). Unfortunately there are some distribution which have no MGF. This kind of the problem cann't occur on an exponential family, because the comunic form of the family always can be determined its MGF.

Kata kunci : *Bentuk kanonik, keluarga eksponensial, fungsi pembangkitan momen.*

Pendahuluan

Pada makalah ini akan dibahas Fungsi Pembangkit Momen (FPM) secara umum, dimana dengan melihat FPM dari sebarang variabel random kita bisa mengenali bentuk distribusi variabel random tersebut. Mean dan variasi tersebut dapat pula di turunkan dari FPM-nya. Selanjutnya akan dibahas pula FPM dari keluarga eksponensial yang telah di parameterisasi kembali mengingat tidak setiap distribusi mempunyai FPM.

Materi Prasyarat

Definisi 1

Keluarga densitas disebut keluarga ekponensial satu parameter, bila dapat dinyatakan sebagai

$$f\ (x_{,}\theta) = \exp\ \{t\ (x)\ c(\theta) + d(\theta) + s(x)\} \qquad (1)$$

Dengan :

θ	:	parameter
$c(\theta), d(\theta)$	:	Fungsi berharga real dari θ
$t(x), s(x)$	:	Fungsi berharga real dari x

Sering kali untuk keperluan tertentu, diperlukan reparameter sehingga dengan mengambil $\eta = c(\theta)$ berbentuk (1) dapat ditulis dalam bentuk "kanonik" :

$$f(x, \eta) = \exp\{ \eta\, t(x) + do(\eta) + s(x) \} \qquad (2)$$

Bentuk (2) adalah tidak tunggal, sebagai contoh gandakan η dengan c dan pada saat yang sama kita dapat mengganti t(x) dengan $\underline{t(x)}$. Himpunan H : $\{\eta \mid do(\eta) < \infty\}$ disebut ruang parameter alami dari keluatga eksponensial .

<u>Contoh 1</u>

Misal x adalah variabel random dari distribusi normal dengan mean μ dan variasi σ^2 diketahui , maka pdf dari x adalah :

$$F(x,\mu) = 1/\sqrt{2\pi}\,.\sigma \ \exp -1/2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$$

$$= \exp\left\{ \frac{\mu x}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{x^2}{2\sigma^2} \ \mathrm{In}\sqrt{2\pi}\ .\sigma \right\}$$

dengan mengambil $\eta = \mu / \sigma^2$, maka bentuk kanonik dari distribusi $N(\mu, \sigma^2)$ adalah

$$f(x_1 \eta) = \exp\left\{\eta x - \frac{\eta^2 \sigma^2}{2} - \frac{x^2}{2\sigma^2} - \mathrm{In}\sqrt{2\pi}\,.\sigma \right\} \qquad (3)$$

Definisi 2

Fungsi Pembangkit Momen (FPM) dari sebuah variabel random x untuk setiap bilangan real s didefinisikan sebagai :

$$\Psi_x(s) = E(e^{xs})$$

$$= \begin{cases} \int e^{xs} f(x)\ dx & \text{jika x Kontinu} \\ \sum_x e^{xs} f(x) & \text{jika x diskrit} \end{cases}$$

Definisi 3

FPM dari sebarang variabel random terdefinisi jika E (e^{xs}) ada.

<u>Teorema 1</u>

Jika FPM $\Psi_x(s)$ dari sebarang random x ada untuk $|S| \le S$ (untuk suatu $S > 0$), maka $E(x^n)$ ada dan

$$E(x^n) = \Psi_x^{\,n}(0) = \frac{d^n}{ds^n}\Psi_x(s)\Big|_{S=0}$$

<u>Bukti :</u>

Berdasarkan definisi 2. $\Psi_x(s) = E(e^{sx})$. Dengan expansi Taylor terhadap e^{sx} dieroleh :

$$\Psi_x(s) = E(e^{xs}) = E\left(1 + xs + \frac{(xs)^2}{2!} + \frac{(xs)^3}{3!} + \ldots\ldots\right)$$

$$= E\left(1 + xs + \frac{x^2 s^2}{2!} + \frac{x^3 s^3}{3!} + \ldots\ldots\right)$$

$$= 1 + s\,E(x) + \frac{s^2}{2!}E\,x^2 + \ldots\ldots + \frac{s^n}{n!}E(x^n) + \ldots\ldots$$

Akibatnya :

$$\Psi_x^{\,1}(s)\quad s=0 \quad = \quad 0 + E(x) + SE(x^2) + \ldots\ldots + \frac{s^{n-2}}{(n-2)!}E(x^n) + \ldots\ldots \quad S=0$$

$$= E(x^2)$$

dan seterusnya dapat dilakukan dengan cara yang sama sehingga diperoleh bentuk umum $E(x^n) = \Psi_x^{\,n}(0)$

Berikut ini di sajikan tabel beberapa distribusi dengan pdf, FPM, mean dan variasinya.

Tabel 1

Nama dan Pdf	FPM	Mean	Variasi
Bernoulli $\theta^x(1-\theta)^{1-x}$	$\theta e^t + (1-\theta)$	θ	$\theta(1-\theta)$
Poission $(\lambda^x e^{-\lambda})\ x!$	$e^{\lambda}(e^t - 1)$	λ	λ
Gamma $(x^{\alpha} e^{-x/\beta}) / \beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)$	$(1-\beta t)^{-\alpha}$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
Uniform $(\beta-\alpha)^{-1}$	$\dfrac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{(\beta-\alpha)}$	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$	$1/12\ (\beta-\alpha)^2$
Normal $(2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\{-1/2\ (\frac{x-\mu}{\sigma})^2\}$ dll	$e^{\mu t} + 1/2\ \sigma^2 t^2$	μ	σ^2

FPM mean digunakan untuk menentukan mean dan variasi dari variabel random, FPM dapat pula digunakan untuk mengenali jenis distribusi dari variabel random tersebut. Hal ini terungkap pada teorema berikut :

Teorema 2 (Teorema Ketunggalan FPM)

(i) Jika dua buah variabel random mempunyai FPM yang sama maka mereka mempunyai fungsi distribusi yang sama.

(ii) Jika dua buah variabel random mempunyai fungsi distribusi yang sama maka mereka mempunyai FPM yang sama.

Teorema–teorema memperlihatkan bahwa terdapat korespondensi satu-satu antara fungsi distribusi dengan FPM, artinya jika kita mempunyai sebuah FPM maka kita bisa mengenali fungsi distribusi nya ataupun sebaliknya. Sayangnya teknis ini tidak selalu dapat digunakan mengingat tidak setiap distribusi mempunyai FPM, seperti diperlihatkan pada contoh berikut :

Contoh 2

Misalkan x adalah variabel random dari distribusi Pareto dengan pdf :

$$F(x_1 \alpha_1 \beta) = \begin{cases} \dfrac{\beta\,\alpha^{\beta}}{X^{\beta+1}} & \text{Jika } x \geq \alpha > 0 \\ 0 & \text{Jika x yang lain} \end{cases}$$

FPM dari distribusi tersebut adalah :

$$\Psi_x(s) = E(e^{sx})$$
$$= \int_{\alpha}^{\sim} e^{xs} \; \frac{\beta\,\alpha^{\beta}}{X^{\beta+1}} \; dx$$
$$= \beta\,\alpha^{\beta-} \int_{\alpha}^{\sim} \frac{e^{xs}}{x^{\beta+1}} \, dx$$

Karena untuk $x \to \sim$, e^{xs}lebih cepat bergerak di banding $x^{\beta+1}$ akibatnya $\frac{e^{xs}}{x^{\beta+1}} \to \infty$. Ini berarti

$E(e^{sx})$ tidak ada, atau dengan kata lain distribusi Pareto tidak memiliki FPM

Kegagalan sebuah distribusi mempunyai FPM tidak akan terjadi pada distribusi yang termasuk ke dalam keluarga eksponensial seperti akan di uraikan pada bagian berikut :

FPM pada Keluarga Eksponensial

Teorema 3

Misalkan x adalah variabel random dari distribusi eksponensial dengan pdf (2) maka FPM dari t(x) "Ada" dan sama dengan :

$$\Psi_{t(x)}^{(s)} = \exp\{do(\eta) - do(\eta + s)\}$$

Bukti :

a. Untuk kasus kotinu

FPM dari t(x) adalah :

$$\Psi_{t(x)}^{(s)} = E(t^{\,t(x)})$$
$$= \int e^{s\,t(x)} \exp\{\eta\, t(x) + do(\eta) + s(x)\}\, dx$$
$$= \int \exp\{(s + \eta)t(x) + do(\eta) + do(\eta + s) - do(\eta + s) + s(x)\}\, dx$$
$$= \exp\{do(\eta) - do(\eta + s)\} \int \exp\{(s + \eta)\, t(x) + do(\eta + s) + s(x)\}\, dx$$
$$= \exp\{do(\eta) - do(\eta + s)\}$$

b. Untuk kasus diskrit

$$\Psi_{t(x)}^{(s)} = \sum_{x} e^{t(x) - s} \exp\{\eta t(x) + do(\eta) + s(x)\}$$

$$= \sum_{x} \exp\{(s + \eta)\, t(x) + do(\eta) + do(\eta + s) - do(\eta + s) + s(x)\}$$

$$= \exp\{\, do(\eta) - do(\eta + s)\} \sum_{x} \exp\{(s + \eta)\, t(x) + do(\eta + s) + s(x)\}$$

$$= \exp\{\, do(\eta) - do(\eta + s)\}$$

Catatan :

$\int \exp\{\, (s + \eta\,)t\,(x) + do(\eta + s) + s\,(x)\,\}\,dx \;=\; \sum_{x} \exp\{(s + \eta)\, t(x) + do(\eta + s) + s(x)\,\} = 1$

Karena $\exp\{(s + \eta)t(x) + do(\eta + s) + s(x)\}$ adalah pdf dari keluarga eksponensial dengan parameter baru $(s + \eta)$.

Teorema 4

Misal x adalah variabel random dengan pdf (2) maka :

$E\,(t(x)) = -\,do^{1}(\eta)$ dan varians $(t(x)) = do^{11}\,(\eta)$

Bukti :

Karena x Variabel random dengan pdf (2), artinya x termasuk kedalam keluarga ekponensial sehingga berdasarkan teorema 3 FPM dari t(x) dijamin ada.

Dengan teorema 1, ditunjukan bahwa $E\,(X^{n}) = \Psi_{x}^{\,n/s} \quad s = 0$

Dalam hal ini dengan mengambil t(x) sebagai variabel baru diperoleh $E\,[\,(t(x)\,)^{n}\,] = \Psi^{n}{}_{t\,(x)}\,(s)\,]_{\,s\,=\,0}$

Akibatnya :

$$
\begin{aligned}
E\,(t(x)\,) &= \Psi^{1}{}_{t\,(x)}\,(s)\,]_{\,s\,=\,0} \\
&= \exp\{\, do(\eta) - do(\eta + s)\}\;.\, -\,do^{1}(\eta + s)\,]_{\,s\,=\,0} \\
&= -\,do^{1}(\eta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\,[\,(t(x)\,)^{2}] &= \Psi^{11}{}_{t\,(x)}\,(s)\,]_{\,s\,=\,0} \\
&= \exp\,\{\, do(\eta) - do(\eta + s)\}\,[\,-\,do^{1}(\eta + s)\,]^{2} - \\
&\quad\; do^{11}(\eta + s)\,.\,\exp\{\, do(\eta) - do(\eta + s)\}\,]_{\,s\,=\,0} \\
&= \{\, do^{1}(\eta)\}^{2} - do^{11}(\eta)
\end{aligned}
$$

Sehingga :

$$
\begin{aligned}
\text{Varians } (t(x)\,) &= E\,[\,(t(x)\,)^{2}] - [\,E(t(x)\,)\,]^{2} \\
&= -\,do^{11}(\eta)
\end{aligned}
$$

Contoh 3

Misal x adalah variabel random dari distribusi Normal dengan mean μ dan variansi σ^{2} (diketahui).

Dari contoh 1 ditunjukan bahwa bentuk kanonik dari distribusi $N(\mu, \sigma^2)$ dengan $\eta = \mu / \sigma^2$ adalah

$$F(x, \eta) = \exp \left\{ \eta x - \frac{\eta^2 \sigma^2}{2} - \frac{x^2}{2\sigma^2} - \ln \sqrt{2\pi} \, . \sigma \right\}$$

Dalam hal ini :

$t(x) = x$

$$do(\eta) = - \frac{\eta^2 \sigma^2}{2}$$

$$s(x) = \frac{-x^2}{2\sigma^2} - \ln \sqrt{2\pi} \, . \sigma$$

Berdasarkan teotema 3 FPM dari $t(x) = x$ adalah

$$\Psi_x(s) = \Psi_{t(x)}(s) = \exp \{ do(\eta) - do(\eta + s) \}$$

$$= \exp \left\{ - \frac{\eta^2 \sigma^2}{2} + \frac{(\eta + s)^2 \sigma^2}{2} \right\}$$

Dari FPM tersebut dapat diturunkan pula mean distribusi tersebut, yaitu :

$$E(x) = E(t(x))$$

$$= \Psi^1_{(x)}(s) \,]_{s=0}$$

$$= - do^1(\eta) = \frac{2\eta \sigma^2}{2} = \eta \sigma^2$$

Jika diperhatikan FPM dan mean dari distribusi ini terlihat berbeda dengan FPM dan mean yang sudah kita kenal (lihat tabel), tetapi dengan mensubtitusikan $\eta = \mu / \sigma^2$ diperoleh

$$\Psi_x(s) = \exp \left\{ - \frac{\eta^2 \sigma^2}{2} + \frac{(\eta + s) \sigma^2}{2} \right\}$$

$$= \exp \left\{ \frac{s^2 \sigma^2 + 2 s \eta \sigma^2}{2} \right\}$$

$$= \exp \{ \mu s + ½ \sigma^2 s^2 \}$$

dan

$$E(x) = \eta \sigma^2 = \frac{\mu}{\sigma^2} . \sigma^2 = \mu$$

Seperti nilai-nilai yang sudah kita kenal

Kesimpulan

FPM dari sebuah variabel random keberadaannya dijamin pada keluarga eksponensial satu parameter, dengan terlebih dahuku mengubah bentuk pdf keluarga ekponensial kedalam bentuk kanonik, untuk selanjutnya mean dan variansi dari variabel random x diturunkan dari FPM yang ada

Daftar Pustaka

Dudewicz, E.J. *Modern Mathematical Statistic.* John Wiley and Son's. New York (1988)

Lehmann, E.L. *Theory Of Point Estimation.* John Wiley and Son's. New York (1983)

Roussas, G. *Linier Statistical Inference and Its Aplications.* John Wiley and Son's. New York (1973)