TINJAUAN KLASIK DAN RELATIVISTIK KESTABILAN ORBIT HAMPIR MELINGKAR DALAM MEDAN GAYA SENTRAL

Oleh:

Endi Suhendi dan Selly Feranie

Jurusan Pendidikan Fisika FPMIPA
Universitas Pendidikan Indonesia

ABSTRAK

Perbedaan tinjauan partikel yang bergerak dalam orbit hampir melingkar yang dipengaruhi medan gaya sentral secara klasik dan relativistik telah dianalisis. Dalam kasus khusus dimana medan gaya sentralnya atraktif dan nilainya berbanding dengan $1/r^n$, telah ditemukan bahwa nilai momentum sudut dan kestabilan orbit hampir melingkar untuk kedua tinjauan terdapat perbedaan. Nilai momentum sudut dan kestabilan orbit hampir melingkar dalam kasus relativistik untuk $2 < n < 3$ tidak selalu stabil, tidak seperti pada kasus klasik.

Kata kunci: *Gaya Sentral, Momentum Sudut, Kestabilan Orbit*

PENDAHULUAN

Partikel yang bergerak dalam orbit melingkar yang dipengaruhi medan gaya sentral secara klasik telah dijelaskan secara rinci oleh Fowles [1]. Kemudian beberapa waktu yang lalu, telah ditinjau juga oleh Boyer [2] perihal partikel yang bergerak dalam orbit melingkar yang dipengaruhi medan gaya sentral secara relativistik. Bahkan lebih spesifik lagi, Boyer meninjau medan gaya sentral berbentuk $F(r) = -k/r^3$ dalam kerangka relativitas khusus. Salah satu hasil yang diperoleh adalah bahwa orbit melingkar hanya muncul untuk nilai momentum sudut $L > k/c$, sedangkan dalam tinjauan klasik orbit melingkar muncul untuk semua nilai momentum sudut yang tidak nol.

Nilai momentum sudut $L > k/c$ merupakan batasan yang mungkin agar partikel mempunyai orbit melingkar secara relativistik. Kita akan meninjau batasan yang sama dari nilai momentum sudut agar partikel memiliki orbit melingkar dalam medan gaya sentral yang lain (yang lebih umum). Kita juga akan menunjukkan bagaimana hasil yang telah diperoleh secara klassik [1] pada kestabilan orbit melingkar dalam medan gaya sentral diubah oleh tinjauan secara relativistik.

TINJAUAN KLASIK ORBIT MELINGKAR DALAM MEDAN GAYA SENTRAL

Kecepatan Linier dan Momentum Sudut

Kita tinjau medan gaya sentral yang dituliskan sebagai berikut

$$\vec{F} = F(r)\frac{\vec{r}}{r} \tag{1}$$

Jika sebuah partikel yang dipengaruhi oleh medan gaya sentral ini bergerak dalam orbit melingkar berradius r_o , maka persamaan geraknya adalah

$$F(r_o) = -\frac{mv^2}{r_o} \tag{2}$$

Dari persamaan (2), kita peroleh kecepatan linier dari partikel

$$v = \sqrt{\left(-\frac{r_o F(r_o)}{m}\right)}, \; \left(-\frac{r_o F(r_o)}{m}\right) > 0 \tag{3}$$

dan momentum sudutnya

$$L = mvr_o \tag{4}$$

Kita pilih bentuk gaya sentral umum, untuk $k > 0$ dan n bilangan riel,

$$F(r) = -\frac{k}{r^n} \tag{5}$$

Sehingga kecepatan linier dan momentum sudut partikel menjadi

$$v = \sqrt{\frac{k r_o^{1-n}}{m}} \tag{6}$$

$$L = \sqrt{kmr_o^{3-n}} \tag{7}$$

Kestabilan Orbit Hampir Melingkar

Persamaan gerak radial untuk partikel dalam pengaruh medan gaya sentral adalah

$$m\ddot{r} = \frac{ml^2}{r^3} + F(r) \tag{8}$$

dimana $l = L/m$ (momentum sudut persatuan massa). Untuk orbit melingkar, r adalah konstan dan $\ddot{r} = 0$. Apabila radius orbit melingkarnya adalah r_o maka kita peroleh

$$-\frac{ml^2}{r_o^{\,3}} = F(r_o) \tag{9}$$

Kita tinjau orbit hampir melingkar yang berbentuk

$$r = r_o + x \text{, dimana } |x| << r_o \tag{10}$$

Persamaan gerak radial menjadi

$$m\ddot{x} = \frac{ml^2}{(x+r_o)^3} + F(x+r_o) \tag{11}$$

Uraikan persamaan (11) dalam deret,

$$m\ddot{x} = ml^2 r_o^{-3}\left(1 - 3\frac{x}{r_o} + \ldots\right) + [F(r_o) + F'(r_o)x + \ldots] \tag{12}$$

Dengan syarat persamaan (9), maka persamaan (12) menjadi

$$m\ddot{x} + \left[\frac{-3}{r_o}F(r_o) - F'(r_o)\right]x = 0 \tag{13}$$

Jika koefisien dari *x* pada persamaan (13) bernilai positif, maka persamaan tersebut adalah persamaan osilator harmonik sederhana. Dalam kasus ini, partikel berosilasi secara harmonik pada orbit sekitar lingkaran dengan radius r_o. Akan tetapi, jika koefisien dari *x* pada persamaan (13) bernilai negatif, partikel tidak lagi berosilasi, *x* akan membesar secara eksponen terhadap waktu yang menghasilkan orbit tidak stabil. Orbit partikel akan stabil jika

$$F(r_o) + \frac{r_o}{3}F'(r_o) < 0 \tag{14}$$

Dengan memilih bentuk gaya sentral pada persamaan (5) dan syarat orbit stabil persamaan (14), maka diperoleh

$$-kr_o^{-n} + \frac{r_o}{3}knr_o^{-n-1} < 0 \tag{15}$$

yang menghasilkan

$$n < 3 \tag{16}$$

Persamaan (16) adalah syarat bentuk gaya sentral agar menghasilkan orbit yang stabil dari partikel yang ditinjau secara klasik. Selanjutnya kita akan menganalisis tinjauan orbit melingkar dari partikel dalam pengaruh medan gaya sentral secara relativistik.

TINJAUAN RELATIVISTIK ORBIT MELINGKAR DALAM MEDAN GAYA SENTRAL

Kecepatan Linier dan Momentum Sudut

Dalam kasus relativistik, partikel yang bergerak dalam orbit melingkar berradius r_o dan dipengaruhi medan gaya sentral memiliki persamaan gerak 20:

$$F(r_o) = -\frac{m\gamma v^2}{r_o}, \quad \gamma = (1-\frac{v^2}{c^2})^{-1/2} \tag{17}$$

Jika didefinisikan kuantitas tak berdimensi

$$\eta = -\frac{r_o F(r_o)}{2mc^2} > 0 \tag{18}$$

maka kecepatan linier dan momentum sudut partikel adalah

$$v = c\sqrt{2\sqrt{\eta^4+\eta^2} - 2\eta^2} \tag{19}$$

$$L = mr_o c\sqrt{2\sqrt{\eta^4+\eta^2} + 2\eta^2} \tag{20}$$

Dari persamaan (19) dapat diperlihatkan nilai kecepatan partikel adalah $0 < v < c$ (dan juga v membesar secara monoton terhadap η). Kita dapat menyimpulkan bahwa tepat terdapat satu orbit melingkar untuk setiap radius r_o dimana gayanya adalah atraktif $F(r_o) < 0$.

Kita pilih kembali bentuk gaya sentral pada persamaan (5), sehingga persamaan (19) dan (20) menjadi:

$$v = \sqrt{2}c\sqrt{\sqrt{r_o^{4-4n} + \frac{4m^2c^4}{k^2}r_o^{2-2n}} - \frac{4m^2c^4}{k^2}r_o^{2-2n}} \tag{21}$$

$$L = \frac{k}{\sqrt{2}c}\sqrt{r_o^{4-2n} + \sqrt{r_o^{8-2n} + \frac{4m^2c^4}{k^2}r_o^{6-2n}}} \tag{22}$$

Selanjutnya kita tinjau kasus-kasus berikut:

<u>Kasus $-\infty < n < 2$</u>

Nilai momentum sudut membesar secara monoton terhadap r_o dan semua nilai momentum sudut $0 < L < \infty$ diperbolehkan. Dalam kasus $n = 1$, kecepatan linier tidak bergantung dari radius orbit, hal ini sama seperti pada kasus klasik.

Kasus $n = 2$

Untuk kasus ini, terdapat nilai batas terkecil dari momentum sudut (tetapi tidak untuk radius atau kecepatan)

$$L = \frac{k}{\sqrt{2}c}\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{4m^2c^4}{k^2}r_o^{\,2}}} \tag{23}$$

Dalam limit klasik $c \to \infty$, tidak ada batas terkecil dari nilai momentum sudut.

Kasus $2 < n < 3$

Karena nilai momentum sudut menuju ke ∞ untuk $r_o \to 0$ dan $r_o \to \infty$, maka harus terdapat nilai minimumnya (positif). Nilai minimum momentum sudut terjadi untuk

$$r_o = \frac{k\sqrt{n-2}}{mc^2(3-n)} \tag{24}$$

yang mempunyai nilai

$$L_{min} = mc\sqrt{\frac{3-n}{n-2}}\left[\frac{k\sqrt{n-2}}{mc^2(3-n)}\right] \tag{25}$$

Dalam limit klasik $c \to \infty$, tidak ada batas terkecil dan dalam limit $n \to 2{,}3$ maka nilai momentum sudut akan kembali ke kasus-kasus $n = 2$ dan $n = 3$.

Kasus $n = 3$

Dalam kasus ini terdapat pula batas nilai terkecil momentum sudut:

$$L = \frac{k}{\sqrt{2}c}\sqrt{\frac{1}{r_o^{\,2}}+\sqrt{\frac{1}{r_o^{\,4}}+\frac{4m^2c^4}{k^2}}} \tag{26}$$

Dalam limit klasik, nilai momentum sudut dari semua orbit melingkar untuk kasus ini adalah sama, $L = \sqrt{km}$ sedangkan dalam relativistik, nilai momentum sudut yang lebih besar dari $\sqrt{km}$ diperbolehkan.

Kasus $n > 3$

Nilai momentum sudut menurun secara monoton terhadap r_o, mengakibatkan semua nilai positif dari L diperbolehkan.

Kestabilan Orbit Hampir melingkar

Kita gunakan persamaan garak dalam koordinat polar dan tinjau bagian radial yang menghasilkan kekekalan momentum sudut:

$$L = m\gamma r^2\dot{\theta}, \quad \gamma = (1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}{c^2})^{-1/2} \tag{27}$$

Persamaan (27) dimanfaatkan untuk membuat permasalahan menjadi sederhana, yaitu permasalahan satu dimensi. Persamaan gerak bagian radial adalah

$$m\ddot{r} = mf(r,\dot{r}) = \frac{\alpha F(r)}{\gamma_r^{\ 3}} + mc^2\frac{1-\alpha^2}{\gamma_r^{\ 2} r} \tag{28}$$

dimana kita telah mendefinisikan

$$\gamma_r = (1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2})^{-1/2} \tag{29}$$

$$\alpha = (1 + \frac{L^2}{m^2c^2r^2})^{-1/2}, \quad (0 < \alpha < 1) \tag{30}$$

Orbit melingkar diberikan oleh kondisi-kondisi $r = r_o$ dan $\dot{r} = 0$ serta memenuhi

$$\gamma_r = 1 \tag{31}$$

$$\alpha_o = \sqrt{1+\mu^2} - \mu \tag{32}$$

$$F(r_o) = -mc^2\frac{1-\alpha_o^{\ 2}}{\alpha_o r_o} \tag{33}$$

Kita tinjau orbit yang sangat dekat dengan orbit melingkar (hampir melingkar) yang berbentuk

$$r = r_o + x\text{, dimana } |x| << r_o \tag{34}$$

Persamaan gerak secara aproksimasi menjadi:

$$\ddot{x} = \frac{\partial f}{\partial r}(r_o,0)x + \frac{\partial f}{\partial \dot{r}}(r_o,0)\dot{x} \tag{35}$$

Karena $\dot{r}$ hanya muncul dalam γ_r yang berbentuk kuadrat, turunan terakhir dalam persamaan (35) yang berbanding dengan $\dot{r}$ hilang, sehingga peramaan gerak menjadi

$$\ddot{x} + \left(-\frac{\partial f}{\partial r}(r_o,0)\right)x = 0 \tag{36}$$

Jika $-\frac{\partial f}{\partial r} > 0$, persamaan (36) adalah persamaan osilator harmonik sederhana dan parikel akan berosilasi di sekitar orbit melingkar, keadaan ini adalah keadaan stabil. Tetapi jika $-\frac{\partial f}{\partial r} < 0$, partikel tidak lagi berosilasi di sekitar orbit melingkar, bahkan partikel akan meninggalkan orbit yang melingkar, ini adalah keadaan yang tidak stabil.

Substitusikan persamaan (28) ke (36) menghasilkan

$$\ddot{x} + \left(-\frac{\alpha_o}{mr_o}\left[r_o F'(r_o) + (2+\alpha_o{}^2)F(r_o) \right] \right) x = 0 \qquad (37)$$

Syarat kestabilan orbit hampir melingkar adalah $-\frac{\partial f}{\partial r} > 0$, sehingga memberikan

$$\frac{F'(r_o)}{F(r_o)} + \frac{2+\alpha_o{}^2}{r_o} > 0 \qquad (38)$$

Dalam limit klasik $c \to \infty$ nilai $\alpha_o = 1$, sehingga kita akan kembali memperoleh persamaan (14).

Kita gunakan kembali medan gaya sentral seperti pada persamaan (5), sehingga syarat kestabilan menjadi

$$k\alpha \frac{1-\alpha_o{}^2}{mr_o{}^{n+1}}\left[(2-n) + \frac{m^2c^2r_o{}^2}{L^2}(3-n) \right] > 0 \qquad (39)$$

Tinjau kasus-kasus berikut:

Kasus $n \leq 2$

Orbit hampir melingkar adalah stabil karena $-\frac{\partial f}{\partial r} > 0$.

Kasus $2 < n < 3$

Orbit hampir melingkar adalah stabil untuk $r > r_c$ dan tidak stabil untuk $r < r_c$, dengan

$$r_c = \frac{L}{mc}\sqrt{\frac{n-2}{3-n}} \qquad (40)$$

Kasus $n \geq 3$

Orbit hampir melingkar adalah tidak stabil karena $-\frac{\partial f}{\partial r} < 0$.

Dalam limit klasik $c \to \infty$, kita peroleh kembali hasil yang telah diketahui $[1]$, yaitu orbit hampir melingkar adalah stabil untuk $n < 3$ dan tidak stabil untuk $n \geq 3$.

KESIMPULAN

Kita telah menunjukkan bahwa dalam medan gaya sentral tepat terdapat satu orbit melingkar relativistik untuk setiap radius dimana gayanya adalah atraktif, tetapi untuk $F(r) = -\dfrac{k}{r^n}$ dengan $k > 0$ dan $2 < n < 3$, momentum sudutnya mempunyai batas terkecil yang diberikan oleh persamaan (25). Untuk $n = 3$, semua nilai momentum sudut yang lebih besar dari $\sqrt{\mathrm{km}}$ diperbolehkan, sedangkan dalam kasus klasik, kita hanya mempunyai satu nilai momentum sudut yaitu $\sqrt{\mathrm{km}}$.

Demikian pula untuk kestabilan orbit hampir melingkar. Hasil yang diperoleh dalam kasus relativistik dan klasik adalah sama untuk kasus $n \leq 2$ (stabil) dan $n \geq 3$ (tidak stabil), tetapi untuk kasus $2 < n < 3$, tinjauan secara relativistik merusak kestabilan orbit untuk radius orbit yang nilainya kurang dari persamaan (40). Hasil terakhir mengisyaratkan bahwa koreksi relativistik membuat kestabilan orbit hampir melingkar menjadi lebih rumit.

DAFTAR PUSTAKA

G.R. Fowles, *Analytical Mechanics*, Sixth Edition, Harcourt College Publishers (1998)

T. Boyer, *Circular Orbits under Central Forces in Special Relativity*: preprint arXiv:physics/0405090

K.Krane, *Fisika Modern*, UI Press(1992)

A.P.French, *Special Relativity*, New York, Norton, (1968)