INVESITIGASI FINANSIAL DAN EKONOMI MELALUI FISIKA: FORWARD RATES DAN HEDGING DALAM KAJIAN TEORI MEDAN KUANTUM

Oleh:

Arif Insan Hidayat dan Iyon Suyana

Jurusan Pendidikan Fisika FPMIPA
Universitas Pendidikan Indonesia

ABSTRAKSI

Teori Medan Kuantum dalam fisika digunakan untuk memodelkan pasar finansial sekunder. Berbeda dengan deskripsi stokastik, perumusan menggunakan teori medan kuantum menekankan pada pentingnya aktifitas perdagangan dalam menentukan nilai dari suatu sekuritas. Semua kemungkinan yang dapat mempengaruhi investor dan keuangan merupakan basis dalam Runga Hilbert dari keadaan pasar. Asimptotis volatilitas menunjukkan probabilitas jangka panjang dari saham dan produk derivatif yang diperdagangkan. Makalah ini membahas mengenai volatilitas laju kontrak forward (*forward rates*) dalam pasar sekunder. V*olatilitas forward rates* pada teori sebelumnya telah ditinjau sebagai suatu variabel yang deterministik. Teori medan kuantum dalam paper ini kemudian dikaji generalisasinya untuk kasus volatilitas yang stokastik.

Kata kunci: volatilitas, *forward rates*, teori medan kuantum, *hedging*.

PENDAHULUAN

Terdapat tujuh instrumen dalam pasar modal yaitu saham, obligasi, obligasi konvertibel, *rights*, warran, reksadana, serta *aset back securities*. Disamping itu ada pula instrumen deriatifnya meliputi *options* (baik yang berbasif *forward* ataupun yang berbasis *futures*) serta swap. Makalah ini akan menekankan kepada *forward* valuta asing. Kontrak *forward* di pasar valuta asing terjadi antara suatu bank dengan nasabahnya (mungkin juga sesama bank) untuk mensepakati pengiriman pada tanggal tertentu, sejumlah mata uang, dan kursnya ditetapkan pada waktu kontrak disepakati.

Semakin besar nilai valuta (aset) yang di-*forward*-kan maka akan semakin tinggi kemungkinan perbedaan dengan harga eksekusi (baik itu naik ataupun turun), inilah yang kemudian banyak disebut sebagai volatilitas. Volatilitas paling sering menjadi referensi dalam hal standar devasi dari perubahan nilai instrumen keuangan terhadap waktu. Volatilitas juga dapat menggambarkan tingkat resiko keuangan pada suatu masa tertentu. Untuk instrumen yang mengikuti *Gaussian Random Walk* dan Proses Weiner maka volatilitas akan naik seiring dengan bertambahnya waktu. Secara konsep, hal ini terjadi karena seiring bertambahnya waktu maka bertambah pula kemungkinan harga instrumen keuangan itu bergerak menjauh dari harga mula-mula.

Forward rates, dengan volatilitasnya, merupakan salah satu aspek yang esensi dalam pasar hutang (*debt market*) serta banyak di pakai dalam hal finansial, terutama untuk kontrak finansial jangka panjang sampai masa jatuh tempo tertentu (maturitas) dan juga digunakan dalam mekanisme *hedging* (lindung nilai). Model mengenai *forward rates* yang digunakan umum selama ini adalah model *Heath-Jarrow-Morton* (HJM) (D Heath, R Jarrow dan A Morton), dan pada perkembangannya ada sejumlah cara dimana model HJM ini digeneralisasi. Dalam referensi (D.P. Kennedy) dan (P. Goldstein) telah diperkenalkan mengenai korelasi antara *forward rates* dengan maturitas yang bervariasi, dan pada (P. Santa-Clara dan D Sornette), (D. Sornette) *forward rates* dimodelkan sebagai suatu string stokastik.

Penerapan teknik-teknik fisika dalam finansial (J-P. Bouchaud and D Sornette) (R.N Mantegna dan H.E Stanley) telah dibuktikan bermanfaat dalam aplikasinya, khususnya penggunaan teknik integral lintasan dalam berbagai masalah finansial (J.P. Bouchaud dan M. Potters). Dalam (M. Otto), teknik integral lintasan telah dapat diterapkan dalam mempelajari suatu produk sekuritas dengan volatilitas stokastik.

Volatilitas *forward rates* merupakan suatu perhitungan yang sentral guna menentukan derajat fluktuasi *forward rates*. Dalam model yang dipelajari di (M. Rosa-Clot dan S Taddei) volatilitas yang diambil dalam *forward rates* merupakan variabel yang deterministik. Pertanyaan kemudian muncul seiring dengan perkembangan fakta bahwa volatilitas sesungguhnya merupakan suatu kuatitas random yang selalu berfluktuasi. Sifat Random volatilitas ini kemudian dapat menentukan sejauh mana volatilitas berfluktuasi. Data pasar untuk eurodullar *futures* menyajikan suatu perhitungan yang akurat untuk *forward rates* dan untuk imbal baliknya (yield) juga merupakan fungsi random dari volatilitas *forward rates*.

Model tentang *forward rates* yang diajukan dalam (M. Rosa-Clot dan S Taddei) adalah model teori medan kuantum yang diajukan Baaquie, yang merupakan generalisasi dari model HJM dan memungkinkan untuk mengembangkan model ini guna menentukan volatilitas stoksatik *forward rates*. Berlawanan dengan teori medan kuantum, perumusan *forward rates* sebagai suatu string stokastik di (P. Santa-Clara dan D Sornette), (D. Sornette) tidak dapat dikembangkan dalam kasus volatilitas adalah stokastik selama hambatan-hambatan non linearitas tidak ditangani secara baik.

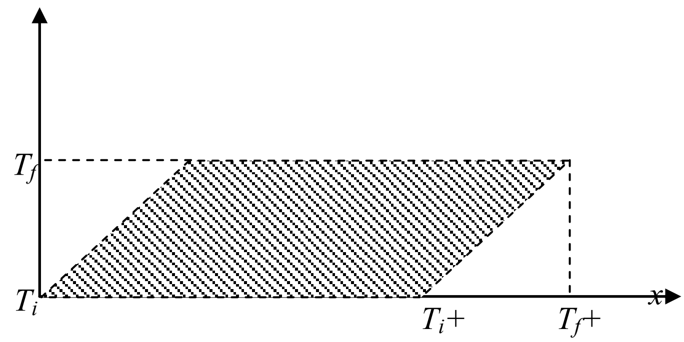
PEMBAHASAN TEORI MEDAN KUANTUM UNTUK FORWARD RATES DENGAN VOLATILITAS STOKASTIK

Forward rates sendiri terdiri atas sekumpulan laju bunga untuk kontrak berjangka yang mulai berlaku pada waktu t untuk jatuh tempo pada waktu $x >$. Pada saat tertentu t, kontrak berjangka ini akan eksis dalam pasar *forward rates* untuk selang waktu T_{FR} di masa mendatang; Sebagai contoh, jika t mengacu ada waktu sekarang, kemudian *forward rates*nya akan berlangsung dalam selang waktu t_0 sampai dengan waktu t_0+T_{FR}. Dalam pasar T_{FR} biasanya maksimal 30 tahun. Umumnya, pada saat t, semua *forward rates* akan eksis sampai pada waktu $t+T_{FR}$ (M. Rosa-Clot dan S Taddei). *Forward rates* pada waktu t dilambangkan dengan $f(t,x)$, dengan $t < x < \; + T_{FR}$ yang kemudian di sebut dengan kurva *forward rates*.

Karena pada waktu sesaat t terdapat banyak *forward rates* maka hal ini mirip dengan kuantum string (non relativistik) sehingga dibutuhkan sejumlah variabel independen dalam mendeskripsikan evolusi acaknya. Kuantitas yang dapat mendeskripsikan secara generik adalah sistem medan kuantum. Untuk memodelkan *forward rates* dan obligasi, dalam makalah ini digunakan studi teori medan kuantum dua dimensi dalam domain euclidian berhingga. Ketika meninjau *forward rates* $f(t,x)$ sebagai suatu medan kuantum; maka $f(t,x)$ diambil sebagai suatu variabel independen yang acak untuk tiap x dan tiap t. Sebagai penyederhanaan notasi maka ditinjau kedua x dan t adalah kontinu dan pendiskritisasian parameter ini hanya dilakukan ketika perlu untuk mendiskusikan evolusi waktu dari sistem untuk yang lebih detail.

1. Lagrangian Forward Rates dengan Volatilitas Deterministik

Pertama akan dibahas secara singkat tentang pentingnya teori medan *forward rates* dengan volatilitas deterministik. Sebagai bentuk konkretnya, misalkan *forward rates* di mulai dari waktu T_i sampai pada masa mendatang di $t =$. Karena semua *forward rates* $f \; t,x$ selalu untuk masa mendatang, maka dalam hal ini $x >$, oleh karena itu medan kuantum $f \; t,x$ didefinisikan sebagai medan dengan domain berbentuk jajaran genjang $\mathcal{P}$ yang dibatasi oleh garis-garis sejajar $x =$ dan $x = \; +$ dalam arah sumbu maturitas ; serta garis $t =$ dan $t =$ dalam arah sumbu waktu sebagaimana digambarkan dalam gambar 1. dibawah ini:



Gambar 1. Domain $\mathcal{P}$ Forward Rates

Setiap titik dalam domain $\mathcal{P}$ merepresentasikan suatu variabel integrasi $f\ \ t,x$ yang independen.

Interpretasi teori medan pada evolusi *forward rates* sebagaimana dinyatakan dalam domain $\mathcal{P}$ yaitu suatu string kuantum (non-relativistik) yang berpindah dengan satuan kecepatan dalam arah *x*.

Dari model HJM, *forward rates* memiliki kecepatan *drift* α dan volatilitas σ, dan kedua kuantitas ini akan tampak dalam persamaan *Lagrangian* untuk *forward rates*. Guna mendefiniskan *Lagrangian*, pertama kita membutuhkan suku kinetik, yang dilambangkan dengan $\mathcal{L}_{\text{kinetik}}$, guna mendefinisikan standar waktu evolusi *forward rates*.

Guna mendefinisikan Lagrangian maka perlu diperkenalkan suku lain sebagai gangguan yang merubah bentuk *forward rates* dalam arah sumbu *x*. Analogi dengan hal ini dalam string biasa adalah suku potensial dalam *Lagrangian* yang membuat bentuk runcing dalam string, karena bentuk string sendiri sebenarnya mengandung suku potensial.

Untuk memodelkan sifat-sifat yang mirip dengan string pada *forward rates*, tidak dapat menggunakan suku turunan $\left(\frac{\partial}{\partial}\right)^2$ dalam *Lagrangian*nya, karena hal ini hanya berlaku pada kondisi tanpa kehadiran arbitrase saja. Kondisi tanpa arbistrase diperlukan ini agar *Lagrangian* mengandung suku turunan dengan orde yang lebih tinggi, khususnya suku dengan bentuk $\left(\frac{\partial f}{\partial\,\partial}\right)^2$; yang mirip dengan sistem string yang memiliki rigiditas berhingga. Istilah seperti ini dalam Lagrangian *forward rates* dinamakan $\mathcal{L}_{\text{rigiditas}}$ dengan parameter baru μ, diberikan oleh $\frac{1}{\mu}$, yang menunjukkan kuantitas fluktuasi dari *forward rates* terhadap waktu dalam arah sumbu *x*. Jika diberlakukan limit $\mu \rightarrow$, akan diperoleh hasil yang sama dengan model HJM, yang juga akan mirip dengan string dengan rigiditas tak hingga.

Aksi dari *forward rates* diberikan oleh persamaan :

$$S\ f\ = \int_{T_i}^{T_f} dt \int_{t}^{t\ T_{FR}} dx \mathcal{L}\ f \tag{1}$$

$$\equiv \int_{\mathcal{P}} \mathcal{L}\ f \tag{2}$$

Dengan rapat *Lagrangian* $\mathcal{L}\ f$ diberikan oleh :

$$\mathcal{L}\ f\ = \mathcal{L}_{kinetik}\ f\ + \mathcal{L}_{rigiditas}\ f \tag{3}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{f\ \ t\ x}{t}\ \ \frac{t\ x}{t\ x}\right) \quad \left(\frac{f\ \ t\ x}{t}\ \ \frac{t\ x}{x\ \ \ t\ x}\right)\right]$$

$$-\infty \leq f\ \ t\ x\ \leq +\infty \tag{4}$$

Adanya suku kedua dalam persamaan aksi yang diberikan persamaan (3) tidak dicantumkan ketika kondisinya tanpa arbitrase, dan studi empiris yang dilakukan (C. Chiarella dan N. El-Hassan) menguatkan bukti bahwa suku ini merupakan suku evolusi *forward rates*. Singkatnya, menurut (C. Chiarella dan N. El-Hassan) *forward rates* berlaku seperti string kuantum, dengan ruang dan waktu bergantung kepada kecepatan drift α , massa efektifnya diberikan oleh $\frac{1}{\sigma\ (\ ,x)}$, dan rigiditas string sebanding dengan $\frac{1}{\mu}$.

Karena teori medan didefinisikan dalam dalam domain $\mathcal{P}$, maka perlu untuk menspesifikasi syarat batas untuk seluruh empat batas jajaran genjang tersebut.

a. Kondisi Terikat Dirichlet (awal dan akhir)

Syarat batas awal dan akhir untuk kondisi Dirichlet dalam arah sumbu t diberikan oleh :

$$T_i\ T_f\ \ <\ \ <\ \ +\ \ \ T_i, x\ ,\ f\ \ T_f, x \tag{5}$$

yang meliputi kurva *forward rates* dari awal sampai akhir.

b. Kondisi Bebas Neumann

Dalam menspesifikasi syarat batas dalam arah sumbu x, perlu menganalisis aksi yang diberikan oleh persamaan (1) guna menentukan bahwa dalam kondisi itu aksi tidak mengandung suku permukaan. Analisis ini kemudian menghasilkan kondisi Neumann dengan versi sebagai berikut :

$$T_i < t < T_f \; , \; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} - \alpha(t,x)}{\sigma(t,x)} \right) = 0 \tag{6}$$

dan

$$x = t \quad \text{atau} \quad x = t + T_{FR} \tag{7}$$

Forward rates dalam teori medan kuantum didefinisikan oleh Integral Lintasan Feynmann dengan mengintegrasikan terhadap semua konfigurasi yang mungkin, dan hasil untuk $f(t,x)$ adalah:

$$Z = \int \tag{8}$$

$$\int \qquad \qquad \int_{t,x \in \mathcal{P}} \tag{9}$$

Perhatikan bahwa $e^{S[f]}/Z$ adalah probabilitas untuk konfigurasi medan yang berbeda yang terjadi ketika dibentuk integral fungsional $f(t,x)$.

2. Lagrangian Forward Rates dengan Volatilitas Stokastik

Untuk menyatakan fungsi volatlitas $\sigma(t,x)$ stokastik, dalam formalisme teori medan kuantum perlu untuk menaikkan $\sigma(t,x)$ dari fungsi yang deterministik ke dalam fungsi yang random. Ada dua cara yang dapat digunakan guna menaikkan volatilitas menjadi kuantitas yang stokastik, yaitu:

a. Meninjau volatilitas sebagai suatu fungsi dari *forward rates* $f(t,x)$

b. Meninjau volatlitas sebagai suatu medan kuantum yang independen

dalam makalah ini akan dikaji kemungkinan keduanya.

1) Volatilitas sebagai Fungsi *Forward Rates*

Dalam (B. E Baaquie, L.C. Kwek dan S, Marakani) telah diindikasikan bahwa volatilitas sebenarnya merupakan fungsi dari *forward rates*. Model standar menggunakan pendekatan ini dengan persamaan volatilitas secara ringkas diberikan oleh :

$$\sigma(t,x, f(t,x)) = \sigma_0(t,x) f^{\nu}(t,x) \tag{10}$$

dengan

$$\sigma_0(t,x) \text{ adalah fungsi deterministik} \tag{11}$$

karena volatilitas $\sigma(t,x) > 0$, maka $f(t,x)$ juga >0, berlawanan dengan persamaan (4), diperoleh:

$$f(t,x) = f_0\, e^{\phi(t,x)} > 0 \quad ; \quad -\infty \le \phi(t,x) \le \infty \tag{12}$$

dengan $f(t,x) > 0$ karena *forward rates* di pasar finansial selalu positif dan hal ini akan dipakai dalam perhitungan selanjutnya. Dengan limit $\mu \to$ dalam persamaan (10) akan menghasilkan cakupan volatilitas model HJM.

Adapun pandangan-pandangan empiris volatilitas sebelumnya menurut [B. E Baaquie, L.C. Kwek dan S, Marakani] diberikan dalam tabel 1. berikut:

Tabel 1. Berbagai Rumusan Volatilitas

Model	Volatilitas
Ho dan Lee (1986)	$\sigma(t,x,f(t,x)) = \sigma_0$
CIR (1985)	$\sigma(t,x,f(t,x)) = \sigma_0 f^{\frac{1}{2}}(t,x)$
Courtadon (1982)	$\sigma(t,x,f(t,x)) = \sigma_0 f(t,x)$
Vasicek (1997)	$\sigma(t,x,f(t,x)) = \sigma_0 \exp(-\lambda(x-t))$
Heath-Jarrow-Morton / HJM (1992)	$\sigma(t,x,f(t,x)) = \sigma_0 + \sigma_1(x,t) f(t,x)$

Makalah ini akan membahas bentuk umum *Lagrangian* dalam persamaan (3) untuk kasus *forward rates* yang selalu positip. Interpretasi *Lagrangian* dalam persamaan (3) akan valid jika semua *forward rates* mendekati nilai tertentu f_0. Oleh karena itu menghasilkan persamaan:

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = f_0 e^{\phi(t,x)} \frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t} \tag{13}$$

$$\approx f_0 \frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t} + O(\phi^2) \tag{14}$$

oleh karena itu dibuat mapping sebagai berikut:

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} \to f_0 \frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t} \tag{15}$$

Persamaan (3) kemudian digeneralisir menjadi :

$$\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}_{kinetik}(\phi) + \mathcal{L}_{rigiditas}(\phi)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{f_0 \frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t} - \alpha(t,x)}{\sigma_0(t,x)e^{\nu\phi(t,x)}}\right\}^2 + \frac{1}{\mu}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_0 \frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t} - \alpha(t,x)}{\sigma_0(t,x)e^{\nu\phi(t,x)}}\right)\right\}^2\right] \tag{16}$$

nantinya dalam penurunan Hamiltonian- sistem akan memerlukan perhitungan dengan solusi trivial dalam integrasinya

Fungsi Partisi didefinisikan secara teori oleh Integral Lintasan Feynmann sebagai berikut:

$$Z = \int D\phi \, f^{-\nu} e^{S(\phi)} \tag{17}$$

$$\int D\phi \, f^{-\nu} \equiv \prod_{(t,x)\in P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi(t,x) f^{-\nu}(t,x) \tag{18}$$

dengan syarat batas yang diberikan untuk $f(t,x)$ dalam persamaan (5) dan (6) tetap berlaku untuk mempertahankan volatilitas stokastik dalam *Lagrangian* di persamaan (16).

2) Volatilitas sebagai Suatu Medan Kuantum yang Independen

Sekarang akan dibahas asumsi yang kedua, yaitu jika volatilitas $\sigma_0(t,x)$ ditinjau sebagai suatu medan kuantum yang independen. Karena hanya dapat menentukan efek dari volatilitas pada *forward rates*, maka seluruh efek-efek dari volatilitas stokastik akan dimanifestasikan hanya melalui perilaku *forward rates* saja.

Guna penyederhanaan, ditinjau *forward rates* sebagai suatu medan kuantum sebagaimana dalam persamaan (4), dengan:

$$f(t,x) = \infty \; ; \; f(t,x) \leq -\infty \tag{19}$$

karena fungsi volalititas $\sigma(t,x)$ selalu positif, yaitu $\sigma(t,x) > 0$ maka diperkenalkan sebuah medan kuantum lain $h(t,x)$ dengan hubungan sebagai berikut:

$$\sigma(t,x) = \sigma_0 e^{-h(t,x)}; \qquad -\infty \leq h(t,x) \leq +\infty \tag{20}$$

tanda – (negatif) diambil bertujuan untuk meyakinkan secara notasi saja.

Sekarang sistem terdiri atas dua medan kuantum yang saling berinteraksi, dinamakan dengan $f(t,x)$ dan $h(t,x)$ serta mengikuti aturan-aturan sebagai berikut :

- Parameter ξ adalah kuantitas yang menentukan bahwa medan $h(t,x)$ tidak deterministik. Suatu Limit $\xi \to 0$ akan membekukan semua fluktuasi medan $h(t,x)$ dan mereduksinya menjadi fungsi yang deterministik.
- Parameter κ berfungsi mengendalikan fluktuasi $h(t,x)$ dalam arah sumbu x, yang hal ini sama dengan parameter μ yang mengendalikan fluktuasi dari *forward rates* $f(t,x)$ dalam arah sumbu x juga.
- Parameter ρ dengan: $-1 \leq \rho \leq +1$ adalah kuantitas korelasi medan kuantum *forward rates* $f(t,x)$ dengan medan kuantum volatilitas $h(t,x)$.
- Suku *drift* dari volatilitas dinamakan $\beta(t,x)$, dimana analog dengan suku *drift* $\alpha(t,x)$ untuk *forward rates*.

Lagrangian untuk sistem yang berinteraksi di sini tidak unik, artinya ada sejumlah pilihan yang dapat memenuhi kondisi di atas. Suatu *Lagrangian* yang mungkin untuk sistem yang berinteraksi dituliskan dengan analogi *Lagrangian* untuk kasus volatilitas stokastik pada sekuritas tunggal di [M. Otto], yaitu :

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial t}-\alpha}{\sigma} - \rho\,\frac{\frac{\partial h}{\partial t}-\beta}{\xi}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\partial h}{\partial t}-\beta}{\xi}\right)^2 \\ & -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial t}-\alpha}{\sigma}\right)\right)^2 - \frac{1}{2\kappa}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial h}{\partial t}-\beta}{\xi}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{21}$$

dengan persamaan aksi :

$$S[f,h] = \int_P \mathcal{L} \tag{22}$$

disini perlu untuk menspesifikasi syarat batas bagi sistem yang berinteraksi. Kondisi awal dan akhir dari *forward rates* $f(t,x)$ yang diberikan oleh persamaan (5) tetap dipertahankan untuk kasus sistem yang berinteraksi, dan untuk medan volatilitas syarat batasnya mirip, sebagai berikut :

a. Syarat Batas Terikat Dirichlet (awal dan akhir)

Nilai awal dispesifikasi dari data sebagai berikut:

$$T_i(T_f) < x < +T_{FR}, \quad \sigma(T_i,x), \sigma(T_f,x) \tag{23}$$

yang berlaku khusus kurva volatlitas awal dan akhir.

Syarat batas dalam arah sumbu x untuk *forward rates* $f(t,x)$ sebagaimana dalam persamaan (6) tetap dipertahankan pada kasus sistem yang berinteraksi, dan untuk medan volatilitas syaratnya sebagai berikut :

b. Syarat Batas Bebas Neumann

$$T_i < x < T_f \; ; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h(t,x)}{\partial t} - \beta(t,x)\right) = 0 \tag{24}$$

$$; x = \quad atau \; x = \; + T_{FR} \tag{25}$$

untuk keperluan kuantisasi medan volatilitas $\sigma(t,x)$, syarat batas *forward rates* $f(t,x)$ yang diberikan oleh persamaan (6) sebenarnya tidak biasa. Guna memecahkan kondisi tanpa arbitrase, ditemukan bahwasanya α merupakan fungsional berbentuk kuadratik dari medan volatilitas $\sigma(t,x)$. Oleh karena itu syarat batas dalam persamaan (6) sesungguhnya adalah bentuk interaksi antara medan $f(t,x)$ dan medan $h(t,x)$.

Dalam hal ini perlu mendefinisikan perhitungan integrasi untuk medan $h(t,x)$. Hamiltonian untuk sistem yang berinteraksi adalah sebagai berikut :

$$\int Df\, D\sigma^{-1} = \prod_{(t,x)\in\mathcal{P}} \int_{-\infty}^{+\infty} df(t,x)\, d\sigma^{-1}(t,x) \tag{26}$$

$$\prod_{(t,x)\in\mathcal{P}} \int_{-\infty}^{+\infty} df(t,x)\, dh(t,x)\, e^{h(t,x)} \tag{27}$$

Fungsi partisi teori medan kuantum untuk *forward rates* dengan volatilitas stokastik didefinisikan oleh Integral Lintasan Feynmann sebagai berikut :

$$Z = \int Df\, D\sigma^{-1} \tag{28}$$

Nilai pasar yang diamati oleh suatu instrumen keuangan, disebut $O(f,h)$, menyatakan nilai rata-rata instrumen keuangan yang melingkupi semua nilai-nilai yang mungkin dari medan kuantum $f(t,x)$ dan $h(t,x)$ -dinotasikan dengan $\langle O(f,h)\rangle$ -, dengan rapat probabilitas diberikan oleh aksi (yang telah dinormalisasi) dengan simbol :

$$< O(f,h) > = \frac{1}{Z}\int Df\, D\sigma^{-1} O(f,h)\, e^{S(f,h)} \qquad (29)$$

Jika ditinjau limitnya volatilitas akan terseduksi menjadi fungsi yang deterministik, dimana untuk limit ini nilai ξ,ρ dan $\kappa \to$. Suku kinetik medan $h(t,x)$ dalam aksi di persamaan (22) memiliki limit :

$$\lim_{\xi\to 0}\prod_{t,x\in\mathcal{P}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{\mathcal{P}}\left(\frac{\frac{\partial h}{\partial t}-\beta}{\xi}\right)^2\right\} \to \prod_{t,x\in\mathcal{P}}\delta\left(\frac{\partial h}{\partial t}-\beta\right) \qquad (30)$$

yang mengimplikasikan bahwa:

$$<\sigma(t,x)> = \sigma_0 <e^{-h(t,x)}> \quad (31)$$

$$= r_0 \exp\left\{-\int dt'\, \beta(t',x)\right\} + O(\xi,\kappa,\rho) \quad (32)$$

KESIMPULAN

Kita telah melakukan generalisasi model teori medan kuantum untuk forward rates dengan volatilitas stokastik dan Integral Lintasan Feynman dapat secara baik dikembangkan untuk menghitung volatilitas stokastik.

Untuk kasus volatilitas yang deterministik, telah ditemukan dalam (M. Rosa-Clot dan S Taddei) bahwa efek teori medan kuantum 2 dimensi direduksi menjadi teori medan kuantum satu dimensi selama memecahkan sifat-sifat Lagrangian. Bagaimanapun, ketika memperlakukan volatilitas sebagai suatu medan kuantum, teori ini tetap dalam 2 dimensi dan tak dapat direduksi lagi, dan dari sini sifat-sifat teori medan kuantum berlaku.

Model forward rates dengan volatilitas stokastik memiliki sejumlah parameter bebas yang hanya dapat ditentukan dengan mempelajari pasar.

DAFTAR PUSTAKA

D Heath, R Jarrow dan A Morton. *Bond Pricing and The Term Structure of Interest Rates: A new Methodology for Contingent Claims Valuation*. Econometrica 60, 77 (1992)

D.P. Kennedy. *Characterizing Gaussian Model of The Term Structure of Interest Rates. Mathematical Finance* 7 (1997) 107-118

P. Goldstein. *The Term Structure of Interest Rates as a Random Field*. Prepint, Ohio State University (1997)

P. Santa-Clara dan D Sornette. *The Dynamics of The Forward Interest Rates Curve with Stochastic String Shocks*. http://xxx.lanl.gov/cond-mat/9801321 (1997)

D. Sornette. *String Formulation of The dynamics of The Forward Interest Rate Curve*. http: // xxx.lanl.gov/cond-mat/9702136

J-P. Bouchaud and D Sornette, *J. Phys*.I France 4 (1994) 836-881; *J.Phys*.I 6 (1996) 167-175

R.N Mantegna dan H.E Stanley. *Introduction to Econophysics*. Cambridge University Press (1999)

J.P. Bouchaud dan M. Potters. *Theory of Financial Risks*. Cambridge University Press (2000)

M. Otto . *Using Path Integrals to Price Interest Rate Derivatives*. http://xxx.lanl.gov/cond-mat/98112318

M. Rosa-Clot dan S Taddei. *A Path Integral Approach to Derivative Pricing: Formalism and Analytical Results*. http://xxx.lanl.gov/cond-mat/9901277

C. Chiarella dan N. El-Hassan. *Evaluation of Derivative Security Prices in The Heath-Jarrow-Morton Framework as Path Integrals Using Fast Fourier Transform Techniques*. Journal of Financial Engineering Vol 6, no2 (1996)

B.E Baaquie. *A Path Integral Approach to Option Pricing with Stochastic Volatility: Some Exact Result*. Journal de Physique I, 7 no 12 (1997): 1733-1753; http//xxx.lanl.gov/cond-mat/9708178

B. E Baaquie, L.C. Kwek dan S, Marakani. *Simulation of Stochastic Volatility Using Path Integratins: Smiles and Frowns*. http://xxx.lanl.gov/cond-mat/0008327